平成 19 年度

埼玉大学大学院理工学研究科博士前期課程（２次募集）

（数理電子情報系専攻・数学コース）

数　　学

2007 年 2 月 20 日

10:00 – 12:00

注 意 事 項

- $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の中から，３問を選択し，解答すること.
- $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$ の中から，１問を選択し，解答すること.
- 答案用紙１枚につき１問ずつ，計４問を解答すること.
- 配点は各問 25 点とし，合計 100 点とする.

$\boxed{1}$

正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{pmatrix}$ を考える．ただし k は実数とする．

(1)　A の行列式を求めよ．

(2)　A の階数を求めよ．

$\boxed{2}$

$x_1,\, x_2,\, x_3$ の 2 次形式 ${x_1}^2 + 2x_1x_2 + 4{x_2}^2 + 6x_2x_3 + {x_3}^2$ が直交行列 P を用いた変数変換

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

で $\alpha_1{y_1}^2 + \alpha_2{y_2}^2 + \alpha_3{y_3}^2 \ \ (\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3)$ という形に表されるとする．このとき，$\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3$ を求めよ．

$\boxed{3}$

$\{a_n\}$ は，各項が 0 以上 9 以下の整数である数列とする．この数列から，数列 $\{b_n\}$ を次のようにして作る．

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{a_1}{10} \\
b_2 &= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \\
b_3 &= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} \\
&\vdots \\
b_n &= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

このとき，数列 $\{b_n\}$ はコーシー列であることを示せ．

$\boxed{4}$

実数 x, y が $4x^2 - 2xy + y^2 = 4$ を満たすとき，xy の最大値と最小値，およびそれらを与える x, y の組をすべて求めよ．

$\boxed{\mathrm{A}}$

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\alpha = \dfrac{2\omega+1}{\omega+1}$ とおく．また，複素数体 $\mathbb{C}$ の部分集合

$$K = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

を考える．

(1) α を $a + b\omega$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ の形で表せ．

(2) 多項式 $h(x) = x^5 - x^3 + 2x + 6$ に α を代入した値 $h(\alpha)$ が K の元であることを示せ．

(3) 多項式環 $\mathbb{Q}[x]$ から $\mathbb{C}$ への写像

$$\varphi : \mathbb{Q}[x] \ni f(x) \longmapsto f(\alpha) \in \mathbb{C}$$

は準同型写像であることを示し， 像 $\mathrm{Im}(\varphi)$ と核 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ を求めよ．

$\boxed{\text{B}}$

ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ において，$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ とおく.

(1) A の閉包は $\mathbb{R}^2$ であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数 f を考える．A の任意の点 p に対し $f(p) = 0$ を満たすならば, $\mathbb{R}^2$ 上で $f = 0$ であることを示せ.

(3) A の補集合 $\mathbb{R}^2 - A$ が弧状連結であることを証明せよ.

$\boxed{\text{C}}$

$x_1(t)$, $x_2(t)$ に対する次の連立微分方程式の初期値問題を解け.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 8x_1 + 4x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -9x_1 - 4x_2 \\ x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2 \end{cases}$$