平成 19 年度

埼玉大学大学院理工学研究科博士前期課程

（数理電子情報系専攻・数学コース）

数　　学

2006 年 8 月 21 日

10:00 – 12:00

注 意 事 項

- $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の中から，３問を選択し，解答すること.
- $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.
- 答案用紙１枚につき１問ずつ，計４問を解答すること.
- 配点は各問 25 点とし，合計 100 点とする.

$\boxed{1}$

4次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の最大の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

$\boxed{2}$

線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) f の核 $\operatorname{Ker} f$ の基底を求めよ.

(2) f の像 $\operatorname{Im} f$ の次元を求めよ.

$\boxed{3}$

$f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}\quad (0 \leq x \leq 2,\ n = 1, 2, \ldots)$ とする．

(1) 各 $x \in [0, 2]$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(2) 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が区間 $[0, 2]$ で一様収束するかどうか調べよ．

$\boxed{4}$

$\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

と定義する．

(1) $(x,y) \neq (0,0)$ のとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ を求めよ．

$\boxed{\text{A}}$

実2次正則行列全体のなす集合 $GL(2,\mathbb{R})$ は乗法に関して群をなす.（このことは証明なしに認めてよい.）

(1) 行列 A を群 $GL(2,\mathbb{R})$ の元とするとき，$\{A^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は $GL(2,\mathbb{R})$ の部分群であることを示せ.

(2) 群 $GL(2,\mathbb{R})$ の元 B で位数が 3 であるものの例を一つ挙げよ.

(3) 群 $GL(2,\mathbb{R})$ の部分群 H で，位数 4 の巡回群であるものの例を一つ挙げよ.

$\boxed{\text{B}}$

距離空間 X の距離関数を d とし，$p \in X$ と $A \subset X$ に対して，

$$d(p,A) = \inf\{d(p,q) \mid q \in A\}$$

と定める.

(1) 距離関数 $d(p,q)$ は，p について連続であることを示せ.

(2) X がユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ の場合，$p=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ と $A=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2<1\}$ に対して，$d(p,A)$ を求めよ.

(3) A が X の閉集合の場合，$d(p,A)=0$ ならば，$p \in A$ であることを示せ.

$\boxed{\text{C}}$

微分方程式

$$y'' - y = e^x \qquad (\star)$$

を考える．

(1) $y(x) = u(x)\,e^x$ とおくとき，u が満たす微分方程式を求めよ．

(2) $(\star)$ の一般解を求めよ．

(3) 初期条件 $y(0) = y'(0) = 0$ を満たす $(\star)$ の解を求めよ．