埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

令和 2 年 4 月入学

試験問題

数　　　学

2019 年 11 月 9 日　10:00 〜 12:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の 4 問はすべてに解答すること．

2．$\boxed{A}$，$\boxed{B}$，$\boxed{C}$ の中から，1 問を選択し，解答すること．

3．答案用紙 1 枚につき 1 問ずつ，計 5 問を解答すること．

4．答案用紙は裏面も使用してよい．

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること．

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする．

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

行列 A を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になる正則行列 P を 1 つ求めよ．

$\boxed{2}$

V を x に関する 2 次以下の実多項式全体のなすベクトル空間とする. V の部分集合

$$W = \{f(x) \in V \mid f(1) = 0\}$$

を考える.

(1) W は V の部分ベクトル空間となることを示せ.

(2) W の基底を一組求めよ.

(3) V の元 $f(x)$ と $g(x)$ に対し, 内積を

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

と定める. W の直交補空間の基底を一組求めよ.

$\boxed{3}$

2 変数関数 f を次で定義する．

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right) & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$$

ここで，$\tan^{-1}$ は開区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に値をもつ逆正接関数とする．

(1) $y \neq 0$ とする．このとき，$f_x(x,y), f_y(x,y), f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ を求め，$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ が成り立つことを確かめよ．

(2) 偏導関数 f_{xy} は原点で不連続であることを示せ．

$\boxed{4}$

$p > 1$ は定数とする．$x \in [0,1)$ に対し，$f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt[p]{1-t^p}}$ とおく．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 1-0} f(x)$ は収束するか．

(2) $y = f(x)$ の逆関数を $x = g(y)$ とおく．このとき，次の等式を示せ．

$$\frac{d}{dy}\left\{\left(\frac{dg}{dy}\right)^{p-1}\right\} = (1-p)g^{p-1}$$

$\boxed{\mathrm{A}}$

$G_1,\ G_2$ を群，$\varphi : G_1 \to G_2$ を全射な群準同型写像とする．

(1) G_1 がアーベル群であるときには，G_2 もアーベル群であることを示せ．

(2) G_1 が巡回群であるときには，G_2 も巡回群であることを示せ．

(3) G_1 がアーベル群ではなく, G_2 がアーベル群になるような φ の例を挙げよ．

$\boxed{\mathrm{B}}$

$a \in \mathbb{R}$ に対して
$$U(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$
とし，$\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ を
$$\mathcal{O} = \{U(a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$
と定める．

(1) $\mathcal{O}$ は位相空間論における開集合族の公理を満たすことを示せ．

(2) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間ではないことを示せ．

$\boxed{\text{C}}$

自然数 n に対して，関数 f_n を

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

と定義する．

(1) $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$ を求めよ．

(2) 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\frac{x}{1+nx^2}\right)^2 dx$ を求めよ．