埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報専攻・数学プログラム

令和４年４月入学

試験問題

数　　学

2021 年 9 月 11 日　13:00 〜 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること.

2．$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.

3．答案用紙 1 枚につき 1 問ずつ，計 5 問を解答すること.

4．答案用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです.

$\boxed{1}$

a を実数とし，行列 A を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$$

(1)　A の固有値を求めよ．

(2)　A が対角化可能であるような実数 a を求めよ．

$\boxed{2}$

V をベクトル空間とし，$f : V \to V$ を線形写像とする．

(1) V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対し，$f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立となることを示せ．

(2) $\mathbf{0}$ を V の零ベクトルとする．V のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{v}$, $f(\boldsymbol{v})$, $f^2(\boldsymbol{v})$ が $\mathbf{0}$ でなく，$f^3(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ とする．このとき $\boldsymbol{v}$, $f(\boldsymbol{v})$, $f^2(\boldsymbol{v})$ は 1 次独立となることを示せ．

$\boxed{3}$

$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x+y)^2$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の 2 階までの偏導関数をすべて求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

$\boxed{4}$

次の問いに答えよ．

(1) α は実数とする．広義積分

$$\int_0^1 r^\alpha \log r \, dr$$

が収束する α の範囲を求めよ．また収束するときの広義積分の値を求めよ．

(2) p は実数とする．$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ に対し，広義積分

$$\iint_D \frac{\log \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}}} \, dx \, dy$$

が収束する p の範囲を求めよ．また収束するときの広義積分の値を求めよ．

$\boxed{\text{A}}$

R は単位元をもつ可換環とし，$I_1, I_2, I_3, \ldots$ は R のイデアルとする．

(1) $\displaystyle\bigcap_{j\in\mathbb{N}} I_j$ は R のイデアルであることを証明せよ．

(2) 任意の自然数 k に対して $I_k \subset I_{k+1}$ が成り立つとする．このとき $\displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$ は R のイデアルであることを証明せよ．

(3) R の元 x, y が $x \in I_1 \setminus I_2$, $y \in I_2 \setminus I_1$ を満たすならば，$x + y \notin I_1 \cup I_2$ であることを証明せよ．

(4) $I_1 \not\subset I_2$ かつ $I_2 \not\subset I_1$ とする．このとき $I_1 \cup I_2$ はイデアルではないことを証明せよ．

$\boxed{\mathrm{B}}$

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の通常の位相に関する開集合全体のなす族を $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ とする．$\mathbb{R}$ に属さない点 P を取り，$\mathbb{R} \cup \{P\}$ の部分集合族 $\mathcal{N}$ を

$$\mathcal{N} = \{A \cup \{P\} \mid A \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \text{ かつ } \mathbb{R} \setminus A \text{ は有界 }\}$$

と定める．さらに $\mathbb{R} \cup \{P\}$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \cup \mathcal{N}$$

と定める．

(1) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $\mathbb{R} \cup \{P\} \in \mathcal{O}$ であることを示せ．

(2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ であることを示せ．

(3) $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O}$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$ であることを示せ．

$\boxed{\text{C}}$

次の広義積分を求めたい．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

(1) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ の極とその位数をすべて求めよ．

(2) 以下の図に示す積分路での $f(z)$ の積分を考察することにより，I の値を求めよ．