埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報専攻・数学プログラム

令和４年４月入学

試験問題

数　　学

2022 年 2 月 8 日　10:00 〜 12:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること.
2．$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.
3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること.
4．答案用紙は裏面も使用してよい.
5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.
6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです.

$\boxed{1}$

行列 A を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)　行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2)　(1) で求めた固有ベクトルのひとつを $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ とするとき $A\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ をひとつ求めよ．

(3)　$P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ とするとき $P^{-1}AP$ を計算せよ．

(4)　$n \geq 2$ のとき，A^n を求めよ．

$\boxed{2}$

a と b は定数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ に対し，次の問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の階数（ランク）を求めよ．

$\boxed{3}$

2 変数関数 f を次で定義する.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+(x-y)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ.

(3) $f_{xy}(0,0)$ と $f_{yx}(0,0)$ を求めよ.

$\boxed{4}$

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定める．

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$$

次の重積分を，$x = r\cos^4\theta,\ y = r\sin^4\theta$ と変数変換して求めよ．

$$\iint_D x\,dx\,dy$$

$\boxed{\text{A}}$

G, H を群とする.

(1) 写像 $f : G \to H$ が群の準同型写像であることの定義を述べよ. また f が同型写像であることの定義を述べよ.

(2) $g \in G$ に対して, $\varphi_g : G \longrightarrow G$ を $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$ $(h \in G)$ で定める. φ_g は同型写像であることを示せ.

(3) $\mathrm{Aut}(G)$ を G から G への同型写像のなす群とする. ただし $\mathrm{Aut}(G)$ の演算は合成によって定義されているものとする.

$$I : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$$

を $I(g) = \varphi_g$ $(g \in G)$ によって定める. I は準同型写像であることを示せ.

(4) G が 2 次複素正則行列全体のなす群 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ のとき, $\mathrm{Ker}\,(I)$ を求めよ.

$\boxed{\mathrm{B}}$

(X,d) を距離空間とし，$x_0 \in X$ とする．$B \subset X$ を

$$B = \{x \in X \mid d(x, x_0) < 1\}$$

と定める．B の外部，B の境界をそれぞれ B^e, B^f と表すことにする．

(1) $\{x \in X \mid d(x, x_0) > 1\} \subset B^e$ であることを示せ.

(2) $\{x \in X \mid d(x, x_0) = 1\} \supset B^f$ であることを示せ.

(3) $X = (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$ $(x, y \in X)$, $x_0 = 0$ とするとき

$$\{x \in X \mid d(x, x_0) > 1\} \neq B^e$$

であることを示せ.

C

(1) x を実数とする．C^1 級関数 $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が次の連立微分方程式を満たす.

$$xu(y) - yv(y) = yu'(y) + xv'(y) \qquad (y \in \mathbb{R})$$
$$yu(y) + xv(y) = -xu'(y) + yv'(y) \qquad (y \in \mathbb{R})$$
$$u(0) = 1 \quad v(0) = 0.$$

このとき，u と v を求めよ.

(2) 関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ が次を満たす.
$z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$g(z) = ze^x f(y) \qquad (z \in \mathbb{C})$$
$$g(x) = xe^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$g(z)$ は コーシー・リーマンの方程式を満たす.

このとき，$g(z)$ を求めよ.