埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報専攻・数学プログラム

令和５年４月入学

試験問題

数　　学

2022 年 8 月 25 日　13:00 〜 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること．

2．$\boxed{A}$，$\boxed{B}$，$\boxed{C}$ の中から，１問を選択し，解答すること．

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること．

4．答案用紙は裏面も使用してよい．

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること．

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする．

試験問題は，次ページからです.

$\boxed{1}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ とし，$\mathbb{R}^2$ 上の双１次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$$

で定める．

(1) $\langle\ ,\ \rangle$ が $\mathbb{R}^2$ の内積であることを示せ．ただし $\langle\ ,\ \rangle$ が $\mathbb{R}^2$ の双１次形式であることは示さなくて良い．

(2) この内積に関する $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底を一組求めよ．

$\boxed{2}$

行列 A を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A の最小多項式を求めよ．

$\boxed{3}$

関数 $f(x,y)$ を次で定める.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) 1 階偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) $f_x(x,y)$ が原点で偏微分可能か調べよ.

$\boxed{4}$ 非負整数 $m,\ n$ に対し

$$I(m,n)=\int_{-2}^{1}(x+2)^m(1-x)^n dx$$

とおく.

(1) 次を示せ.

$$I(m,n)=\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1) \qquad (m,n\geq 1)$$

(2) 次を示せ.

$$\iint_D (y-x^2)^2\,dx\,dy=\frac{1}{3}I(3,3)$$

ただし

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\leq 2,\ y\geq x^2\}$$

とする.

$\boxed{\text{A}}$

R を単位元 1 をもつ可換環とし，I を R のイデアルとする．R の元 x, y に対して

$$x \sim y \iff x - y \in I$$

と定める．

(1) 上の関係 $\sim$ は同値関係であることを証明せよ．

(2) $x, x', y, y' \in R$ とし $x \sim x', y \sim y'$ とする．このとき，$x + y \sim x' + y', xy \sim x'y'$ が成り立つことを証明せよ．

(3) $x \in R$ の同値類は次の集合であることを示せ．

$$\{x + z \mid z \in I\}$$

$\boxed{\text{B}}$

距離空間 (X,d) の空でない部分集合 A に対し，その直径 $\operatorname{diam} A$ を

$$\operatorname{diam} A := \sup_{x,y\in A} d(x,y)$$

により定める．また点 $x \in X$ を中心とする半径 $r > 0$ の開球 $B_r(x)$ を

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\operatorname{diam} B_r(x) \leq 2r$ を示せ．

(2) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の点 x に対し，$\operatorname{diam} B_r(x) = 2r$ を示せ．

(3) 半径 1 の開球の直径が 2 とならないような距離空間の例を挙げよ．

$\boxed{\mathrm{C}}$

$p(x)$, $q(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数とする．常微分方程式

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

の 2 つの解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ に対し $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ とおく．次の問いに答えよ.

(1) $W'(x) = -p(x)W(x)$ を示せ.

(2) 次のどちらかが成立することを示せ.

(a) すべての x に対し $W(x) = 0$

(b) すべての x に対し $W(x) \neq 0$

(3) $y_1(x)$, $y_2(x)$ は 1 次独立とし，連続関数 $f(x)$ に対して

$$u(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),\ c_1(x) = -\int_0^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}dt,\ c_2(x) = \int_0^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}dt$$

とおく．$u(x)$ は次を満たすことを示せ.

$$\begin{aligned} u'(x) &= c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) \\ u''(x) &= c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + f(x) \end{aligned}$$