埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報専攻・数学プログラム

令和５年４月入学

試験問題

数　　　学

2023年2月10日　10:00 〜 12:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること.

2．$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること.

4．答案用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

$a \in \mathbb{C}$ に対し,

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) $a = 0$ のとき

$$M_a = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

となる複素数 λ_1, λ_2 と 2 次の複素正則行列 P を 1 組求めよ.

(2) M_a が対角化可能になるための必要十分条件を求めよ.

$\boxed{2}$

線形変換 $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ を

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y+z \\ -x+z+w \\ x-w \\ 2x+z-2w \end{pmatrix}, \quad x, y, z, w \in \mathbb{R}$$

で定義する.

(1) 標準基底に関する f の表現行列を求めよ.

(2) $\mathrm{Im}\, f$ と $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組ずつ求めよ.

$\boxed{3}$

関数 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = xy \sin\sqrt{2x^2+y^2}$$

で定義する．

(1) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ．

(2) $f(x,y)$ が原点で全微分可能かどうか判定せよ．

$\boxed{4}$

(1) 連続関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して次を示せ.

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

(2) $a > 0$ とする．球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 \leq ay$ の共通部分の体積 V を求めよ.

$\boxed{\mathrm{A}}$

集合 $\mathbb{R}$ は加法に関して群をなす．この群を G とする．また，集合 $\mathbb{Z}$ は加法に関して群をなす．この群を H とする．H は G の部分群である．以上のことは証明なしに認めてよい．いま，$\mathbb{C}$ の部分集合 T を

$$T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1) T は乗法に関して群をなすことを示せ．

(2) 任意の自然数 n に対して，T の元であって位数が n のものが存在することを示せ．

(3) 全射準同型写像 $f : G \longrightarrow T$ であって，

$$\mathrm{Ker}\, f = H$$

となるものの例を 1 つあげよ．

(4) G/H と T が同型な群であることを示せ．

$\boxed{\mathrm{B}}$

距離空間 (X, d) 上の曲線 $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow X$ が半直線であるとは

$$\text{任意の } s, t \geq 0 \text{ に対して} \qquad d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$$

を満たすことをいう．半直線 γ について以下の問いに答えよ．

(1) 点 $p \in X$ を固定し，関数 $f_p : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_p(t) := t - d(p, \gamma(t))$$

と定める．このとき関数 f_p は非減少かつ上に有界であることを示せ．

(2) 関数 $b_\gamma : X \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$b_\gamma(x) := \lim_{t \to \infty} (t - d(x, \gamma(t))), \quad x \in X$$

で定める．このとき，任意の $x, y \in X$ に対して

$$|b_\gamma(x) - b_\gamma(y)| \leq d(x, y)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $(X, d) = (\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ とする．ここで，$d_{\mathbb{R}^2}$ は通常の距離とする．$(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ 上の半直線 $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$\gamma(t) := (t, 0)$$

で定める．この半直線 γ に対し，集合 $b_\gamma^{-1}(c)$ を図示せよ．ただし，b_γ は (2) で定めたものとし $c \in \mathbb{R}$ とする．

$\boxed{\mathrm{C}}$

微分方程式 $x''(t) = \lambda x(t)$ を考える．ただし λ は実数とする．

(1) $\lambda = 0$ のとき，すべての解を求めよ．

(2) $\lambda \neq 0$ のとき，すべての解を求めよ．

(3) 次の境界値問題が自明でない解 $x(t)$ をもつような実数 λ をすべて求めよ．

$$\begin{cases} x''(t) = \lambda x(t) \\ x(0) = x'(1) = 0 \end{cases}$$