埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報専攻・数学プログラム

令和６年４月入学，令和５年秋期入学

試験問題

数　　　学

2023 年 8 月 24 日　13:00 〜 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること.

2．$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.

3．答案用紙 1 枚につき 1 問ずつ，計 5 問を解答すること.

4．答案用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ 上の 2 次形式

$$F(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz$$

について次の問いに答えよ．

(1) $F(x,y,z) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を満たす対称行列 A を求めよ．ただし $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする．

(2) (1) で求めた A に対して，${}^tPAP$ が対角行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ．

(3) (2) で求めた P を用いて，変数変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を考える．2 次形式 F を X, Y, Z を用いて表せ．

$\boxed{2}$

通常の内積が付随した $\mathbb{R}^3$ において，ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ で生成される 1 次元線形部分空間の直交補空間を W とおく．次の問いに答えよ．

(1) W の正規直交基底を 1 組求めよ．

(2) W に関する鏡映変換（W に関して対称な点に移す変換）の標準基底に関する表現行列を求めよ．

$\boxed{3}$

$f(x,y) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{y} + x^2 y\ (x \neq 0, y \neq 0)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点をすべて求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

$\boxed{4}$

次の問いに答えよ．

(1)　$y = e^x - 1\ (x \geq 0)$ の逆関数を求めよ．

(2)　$x \geq 0,\ y \geq 0$ とする．非負の連続関数 $g(s, t)$ に対し，積分範囲を図示することにより，次の不等式を示せ．

$$\int_0^x \int_0^y g(s,t)\,dsdt \leq \int_0^x \int_0^{e^t-1} g(s,t)\,dsdt + \int_0^y \int_0^{\log(s+1)} g(s,t)\,dtds$$

(3)　$x \geq 0,\ y \geq 0$ とする．次の不等式を示せ．

$$\begin{aligned} &xy + \sin(x+y) \\ &\quad \leq \int_0^x \left(e^t - 1 + \cos(e^t - 1 + t)\right)\,dt + \int_0^y \left(\log(s+1) + \cos\left(\log(s+1) + s\right)\right)\,ds \end{aligned}$$

$\boxed{\text{A}}$

R を整域とし，$R[x]$ を R 上の 1 変数多項式環とする．$c \in R$ とし，多項式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^2 - c$$

と定める．$f(x)$ の生成する $R[x]$ のイデアルを I とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $R[x]$ のイデアル J が素イデアルであることの定義を述べよ．

(2) $c = d^2$ となる $d \in R$ が存在するとき I は素イデアルでないことを示せ．

(3) R 上の 1 変数多項式 $g_1(x), g_2(x)$ を $f(x)$ で割った余りをそれぞれ

$$a_1x + b_1, \quad a_2x + b_2 \qquad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in R)$$

とおく．多項式 $g_1(x)g_2(x)$ を $f(x)$ で割った余りを求めよ．

(4) c は次を満たすとする．

$$a^2c - b^2 = 0\ (a, b \in R) \quad \text{ならば} \quad a = b = 0 \quad \text{である．}$$

このとき I は素イデアルであることを示せ．

$\boxed{\mathrm{B}}$

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に通常の距離で位相を定めた位相空間を $\mathbb{E}$ で表す．また，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に次の $\mathcal{O}$ で開集合全体を定めた位相空間を Y で表す．

$$\mathcal{O} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

次の問いに答えよ．

(1)　$\mathcal{O}$ が開集合系の公理を満たすことを示せ．

(2)　写像 $f : \mathbb{E} \to Y$ を次で定める．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x > 1) \\ 1 & (0 < x \leq 1) \\ 2 & (x = 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

f は連続かどうか判定せよ．

$\boxed{\mathrm{C}}$

$\xi \geq 0$ に対して

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ix\xi}\, dx$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi)^2}\, dx = e^{\xi^2} F(2\xi)$ を示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^{\xi} e^{-(R+it)^2}\, dt$ と $\displaystyle\lim_{R\to-\infty} \int_0^{\xi} e^{-(R+it)^2}\, dt$ を求めよ．

(3) $F(0) = \sqrt{\pi}$ を示せ．

(4) $F(\xi)$ を求めよ．