埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報専攻・数学プログラム

令和６年４月入学

試験問題

数　　　学

2024年2月14日　10:00 ～ 12:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること.

2．$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること.

4．答案用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問20点とし，合計100点とする.

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

a を複素数とし，行列 A を次のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

次の問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A が正則行列でないときの a の値を求めよ．

(3) a が (2) で求めた値のとき，A が複素行列の範囲で対角化可能か判定せよ．また，対角化可能である場合，その対角行列を 1 つ求めよ．

$\boxed{2}$

V と V' を有限次元実ベクトル空間とし，$\mathcal{L}(V, V')$ を V から V' への線形写像全体のなす実ベクトル空間とする．また，W と W' をそれぞれ V と V' の部分空間とし，

$$K = \{f \in \mathcal{L}(V, V') \mid f(W) \subseteq W'\}$$

と定める．$\dim V = n$, $\dim V' = n'$, $\dim W = m$, $\dim W' = m'$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\dim \mathcal{L}(V, V')$ を求めよ．

(2) K は $\mathcal{L}(V, V')$ の部分空間であることを示せ．

(3) $\dim K$ を求めよ．

$\boxed{3}$

関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$f(x,y) = xy(1-x-y)$$

次の問いに答えよ．

(1) f の 2 階までの偏導関数をすべて求めよ．

(2) f の極大値を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x+y \leq 1\}$$

と定める．f の D 上の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{4}$

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D と D_n $(n \geq 2)$ を次のように定める．

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1,\ -x + x^2 \leq y \leq x\},$$
$$D_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{n} \leq x \leq 1,\ -x + x^2 \leq y \leq x\right\}$$

また，関数 $f : D \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$f(x, y) = \frac{y}{x^3}$$

次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y)\, dxdy$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} |f(x, y)|\, dxdy$ を求めよ．

(3) f は D で広義積分可能か否かを理由を含めて答えよ．

$\boxed{\text{A}}$

$\mathbb{C}$ 上の 2 次正則行列全体のなす群 $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群 G を次のように定める．

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, c = 0 \right\}$$

また G の部分群 N, H を次のように定める．

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, c = 0,\ a = d = 1 \right\},$$
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, c = 0,\ b = 0 \right\}$$

G は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群であり，N, H は G の部分群であることは認めてよいものとする．
次の問いに答えよ．

(1) 加法群 $\mathbb{C}$ から N への写像 $\varphi : \mathbb{C} \to N$ を

$$\varphi : b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b \in \mathbb{C})$$

と定める．φ は準同型写像であることを示せ．

(2) N は G の正規部分群であることを示せ．

(3) H は G の正規部分群でないことを示せ．

(4) $\iota : H \to G$ を包含写像とし，$\pi : G \to G/N$ を自然な商写像とする．$\pi \circ \iota : H \to G/N$ は同型写像であることを示せ．

$\boxed{\text{B}}$

(X, d) を距離空間とする．$x \in X$ と $r > 0$ に対し，$B_r(x)$ を次のように定める．

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

写像 $f : X \to X$ と $a \in X$ に対し，次の条件 (i)，(ii)，(iii) を考える．

(i) $f(a)$ を含む任意の開集合 V に対し，$a \in U \subseteq f^{-1}(V)$ を満たす開集合 U が存在する．

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$ が成り立つ．

(iii) X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束すれば，点列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束する．

次の問いに答えよ．

(1) (i) ならば (ii) を示せ．

(2) (ii) ならば (iii) を示せ．

(3) 「(iii) ならば (ii)」の対偶を示せ．

$\boxed{\mathrm{C}}$

次の問いに答えよ．

(1) $\theta \in [0, 2\pi]$ に対して，$z = e^{i\theta}$ とおく．$\cos^2\theta$ を z を用いて表せ．

(2) $f(z) = \dfrac{z}{2z^4 + 5z^2 + 2}$ の極とその留数をすべて求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 8\cos^2\theta}\, d\theta$ の値を求めよ．