

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 数理電子情報専攻・数学プログラム

令和7年4月入学，令和6年秋期入学

試験問題

数 学

2024年8月22日 13:00 ～ 15:00

注 意 事 項

1. ，，， の4問はすべてに解答すること。
2. ，， の中から，1問を選択し，解答すること。
3. 答案用紙1枚につき1問ずつ，計5問を解答すること。
4. 答案用紙は裏面も使用してよい。
5. 裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること。
6. 配点は各問20点とし，合計100点とする。

試験問題は、次ページからです。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ とし, } \boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とおく.}$$

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) $\boldsymbol{v}_0$ を A の固有ベクトルの 1 次結合の形で表せ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n \boldsymbol{v}_0}{\|A^n \boldsymbol{v}_0\|}$ を求めよ.

n を 3 以上の整数とし, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を $\mathbb{R}^n$ の 1 次独立なベクトルとする. $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を $\mathbb{R}^3$ の基底とし, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ を次で定まる線形写像とする.

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{w}$$

$$f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$$

$$f(\boldsymbol{e}_3) = 5\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$$

ただし a は実定数とする. 次の問いに答えよ.

- (1) f が単射でないときの a の値を求めよ.
- (2) a が (1) で求めた値のとき, f の像 $\text{Im}(f)$ の次元を求めよ.
- (3) a が (1) で求めた値のとき, f の核 $\text{Ker}(f)$ の基底を 1 つ求めよ.

次の問いに答えよ.

- (1) 関数 $f(x, y) = \min\{|x|, |y|\}$ の原点における偏微分可能性を調べ, 偏微分可能な場合は原点における全微分可能性を調べよ.
- (2) 関数 $g(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$ の原点における偏微分可能性を調べ, 偏微分可能な場合は原点における全微分可能性を調べよ.

次の問いに答えよ．ただし $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ とする．

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$ を求めよ．

(2) 広義積分 $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) dx$ は収束することを示せ．積分値は求めなくてよい．

(3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq x^2\}$ とする．

広義積分 $\iint_D \frac{\sqrt{x}}{x^2 + y^2} dx dy$ は収束することを示せ．積分値は求めなくてよい．

A

R を単位元 1 をもつ可換環とする. R^* は R の単元 (可逆元) 全体の集合を表し, $R[X]$ は X を不定元 (変数) とする R 上の 1 変数多項式環を表すものとする.

- (1) R^* は乗法に関してアーベル群をなすことを示せ.
- (2) $R = \mathbb{Z}$ (整数全体のなす環) のとき, $(R[X])^*$ を求めよ.
- (3) $R = \mathbb{R}$ (実数全体のなす体) のとき, $(R[X]/(X^2 + 1))^*$ を求めよ.

B

距離空間 (X, d_X) , (Y, d_Y) に対し, 関数 $d_{X \times Y} : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

と定める. 次の問いに答えよ.

- (1) $d_{X \times Y}$ は $X \times Y$ 上の距離関数であることを示せ.
- (2) $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ を距離空間 $(X \times Y, d_{X \times Y})$ 内のコーシー列とする. このとき $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は距離空間 (X, d_X) 内のコーシー列であることを示せ.
- (3) (X, d_X) , (Y, d_Y) が完備距離空間ならば $(X \times Y, d_{X \times Y})$ も完備距離空間であることを示せ.

C

次の広義積分を求めたい.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + x + 1} dx$$

(1) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 1}$ の極とその留数をすべて求めよ.

(2) 実数 $R \geq 2$, $\theta \in [0, \pi]$ に対して

$$|f(Re^{i\theta})| \leq \frac{1}{R^2 - R - 1}$$

を示せ.

(3) I の値を求めよ.