

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 数理電子情報専攻・数学プログラム

令和7年4月入学

試験問題

数 学

2025年2月13日 10:00 ～ 12:00

注 意 事 項

1. , , , の4問はすべてに解答すること.
2. , , の中から, 1問を選択し, 解答すること.
3. 答案用紙1枚につき1問ずつ, 計5問を解答すること.
4. 答案用紙は裏面も使用してよい.
5. 裏面を使用する場合は, その旨を表面に明記すること.
6. 配点は各問20点とし, 合計100点とする.

試験問題は、次ページからです。

行列 M を以下で定める.

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 線形写像

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\boldsymbol{x}) = (1 \ 1 \ 1)M\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$$

の核 $\text{Ker } f$ の基底を 1 組求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ 上の双 1 次形式 g を

$$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}M\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$$

と定める. 次を満たす $\mathbb{R}^3$ の 1 次元部分空間 W を 1 つ求めよ.

$$\forall \boldsymbol{w} \in W, \quad g(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = 0$$

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ について、次の問いに答えよ。ただし $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする。

(1) A はただ 1 つの固有値を持つことを示せ。またその固有値を求めよ。

以下、(1) で求めた固有値を α とする。

(2) 固有値 α に対する A の固有空間の基底を 1 つ求めよ。

(3) $(A - \alpha I_2)^2$ を求めよ。

(4) A^n ($n \geq 2$) を求めよ。ヒント: $A = \alpha I_2 + (A - \alpha I_2)$ 。

- (1) 関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が一様連続であることの定義を書け.
- (2) 次の関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は一様連続であることを示せ.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

集合

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$$

の体積を求めよ.

A

G を有限群とする.

- (1) G の位数の定義を書け.
- (2) x を G の元とする. x の位数の定義を書け.
- (3) n を自然数とする. G の位数が n であり, G が位数 n の元を含むならば, G は巡回群であることを示せ.
- (4) H を G の部分群とする. H の G における指数が 2 ならば H は G の正規部分群であることを示せ.
- (5) S_3 を 3 次対称群とする. S_3 の正規部分群 H であって, H も S_3/H も巡回群であるものが存在することを示せ.

B

位相空間に対し，その任意の連結成分が 1 点集合であるとき，完全不連結であるという．次の問いに答えよ．

- (1) 完全不連結でない位相空間の例を挙げよ．ただし証明は与えなくてよい．
- (2) 離散空間は完全不連結であることを示せ．
- (3) 有理数全体からなる集合 $\mathbb{Q}$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相を入れる．このとき $\mathbb{Q}$ は完全不連結であることを示せ．

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は正則関数とし、その実部と虚部をそれぞれ $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ とする。すなわち

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

とする。

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は調和関数とし、

$$h(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$$

で関数 $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する。以下の問に答えよ。

- (1) 関数 f が $\mathbb{C}$ 上で正則であることの定義を書け。
- (2) 関数 u と v が満たす Cauchy-Riemann の関係式を述べ、それを証明せよ。
- (3) 関数 g が調和であることの定義を書け。
- (4) 関数 h が調和であることを示せ。ただし、 f が $\mathbb{C}$ 上正則であるとき、 u, v は無限回微分可能であることと、調和関数は無限回微分可能であることは証明なしに用いて良い。