埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報専攻・数学プログラム

令和８年４月入学，令和７年秋期入学

試験問題

数　　　学

2025 年 8 月 21 日　13:00 〜 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること.

2．$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること.

4．答案用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです.

$\boxed{1}$

行列 A を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

次の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列であるような行列 P を 1 つ求めよ．

(3) 自然数 n に対して，A^n を求めよ．

$\boxed{2}$

$\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

について，次の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}^3$ には標準内積が入っているとする．

(1)　W の直交補空間 $W^\perp$ の基底を 1 組求めよ．

(2)　$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ であって，$\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in W^\perp$ となるものを 1 組求めよ．

$\boxed{3}$

$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 6xy - 9x$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$f(x, y)$ の臨界点を求めよ．

(2)　$f(x, y)$ の極値を求めよ．

$\boxed{4}$

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$ とする．$f\colon E \to \mathbb{R}$ を次で定義する．

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

次の問いに答えよ．

(1) $g(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ に対して，$g_x(x, y)$ を求めよ．

(2) $f^+\colon E \to \mathbb{R}$ を次で定義する．

$$f^+(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (y \geq x) \\ 0 & (x < y) \end{cases}$$

$n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$E_n = \{(x, y) \in E \mid y \geq 1/n\}$$

とする．このとき，次を計算せよ．

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{E_n} f^+(x, y)\, dxdy$$

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{E_n} f(x, y)\, dxdy$$

(3) 次の広義積分は収束するか答えよ．

$$\iint_E f(x, y)\, dxdy$$

$\boxed{\text{A}}$

R を単位元 1 をもつ可換環とする．R のイデアル I, J に対して，R の部分集合 $S_{I,J}$ を

$$S_{I,J} = \{xy \mid x \in I, y \in J\}$$

と定める．また，$S_{I,J}$ で生成された R のイデアルを $T_{I,J}$ と表すことにする．次の問いに答えよ．

(1) $S_{I,J} \subset T_{I,J} \subset I \cap J$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $R = \mathbb{Z}$, $I = (2)$, $J = (3)$ とする．このとき，$S_{I,J}$, $T_{I,J}$ をそれぞれ求めよ．

(3) $R = \mathbb{R}[X, Y]$（X, Y を変数とする実数体 $\mathbb{R}$ 上の 2 変数多項式環）とし，$I = J = (X, Y)$ とする．

（ア）次の主張 (A) が正しいことを示せ．

$$(A) : T_{I,J} = (X^2, XY, Y^2) \text{ である．}$$

（イ）次の主張 (B) は正しいか，それとも誤りか，理由を述べて判定せよ．

$$(B) : S_{I,J} = (X^2, XY, Y^2) \text{ である．}$$

$\boxed{\text{B}}$

$\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{\emptyset\} \cup \{U \mid U \subset \mathbb{R} \text{ かつ } \mathbb{R} \setminus U \text{ は } \mathbb{R} \text{ の有界部分集合}\}$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1) $\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}$ の開集合系であることを示せ.

(2) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間でないことを示せ.

$\boxed{\text{C}}$

連続関数 f は積分方程式

$$f(t) + e^t \int_0^t e^{-x}\{f(x)\}^2\,dx = 2e^t$$

をみたすとする．次の問いに答えよ.

(1) $f(t)$ は微分方程式

$$\frac{df}{dt} = f - f^2$$

をみたすことを示せ.

(2) $f(0)$ を求めよ.

(3) $f(t)$ を求めよ.