

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 数理電子情報専攻・数学プログラム

令和8年4月入学

試験問題

数 学

2026年2月12日 10:00 ~ 12:00

注意事項

1. 1, 2, 3, 4 の4問はすべてに解答すること。
2. A, B, C の中から, 1問を選択し, 解答すること。
3. 答案用紙1枚につき1問ずつ, 計5問を解答すること。
4. 答案用紙は裏面も使用してよい。
5. 裏面を使用する場合は, その旨を表面に明記すること。
6. 配点は各問20点とし, 合計100点とする。

試験問題は、次ページからです。

1

行列 A を次で定める.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列であるような行列 P をひとつ求めよ.
- (3) 自然数 n に対して, A^n を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ とし, 線形変換}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

を考える.

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) $\text{Ker}(f)$ と $\text{Im}(f)$ の次元を求めよ.
- (3) \mathbb{R}^3 の標準内積に関して, $\text{Im}(f)$ の直交補空間の基底を求めよ.

関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定める.

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$$

- (1) f が連続となる点をすべて求めよ.
- (2) $f_x(0, 0)$ と $f_y(0, 0)$ を求めよ.
- (3) f の原点における全微分可能性を調べよ.

\mathbb{R}^2 の部分集合 D を次で定める.

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, 2y \geq \sqrt{3}x \right\}$$

次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D x \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} dx dy$$

A

次の問いに答えよ.

(1) G を加法群とし, H を G の部分群とする. $x, y \in G$ とする. 2つの剰余類 $x + H$ と $y + H$ が一致するための必要十分条件は $x - y \in H$ であることを示せ.

(2) $G = \mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$ とする. G はベクトルの加法に関してアーベル群をなす. (このことは証明なしに認めてよい.)

(ア) 加法群 G は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって生成されることを示せ.

(イ) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ によって生成される G の部分群を H_1 とする. 剰余群 (商群) G/H_1 の位数を求めよ.

(ウ) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ によって生成される G の部分群を H_2 とする. G/H_2 の位数を求めよ.

B

\mathbb{R} 上の二項関係 \sim を

$$x \sim y \iff \text{ある } m \in \mathbb{Z} \text{ が存在して } y = x + m \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

と定める.

- (1) \sim は同値関係であることを示せ.
- (2) \mathbb{R}/\sim を商位相空間, $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ を商写像とする. このとき, π は開写像であることを示せ.
- (3) \mathbb{R}/\sim はハウスドルフ空間であることを示せ.

C

複素関数 f を

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 1}$$

で定める. 次の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ の極をすべて求めよ.

(2) $f(z)$ に留数定理を適用し, 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$$

の値を求めよ.