埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

平成 20 年度 入学試験問題

数　　　学

2007 年 8 月 21 日　13:00 〜 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること。

2．$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること。

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること。

4．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする。

$\boxed{1}$ a, b を実数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 & b & 3 \end{pmatrix}$$

の階数を求めよ。

$\boxed{2}$ $M(2,3)$ によって，2 行 3 列の実行列全体の集合を表す。$M(2,3)$ は行列の和と実数倍によってベクトル空間になる。

(1) $M(2,3)$ の次元を求めよ。

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし，

$$S = \{A \in M(2,3) \mid \mathrm{Tr}\,({}^t\!BA) = 0\}$$

とおく。ただし，$\mathrm{Tr}\,(X)$ は正方行列 X のトレースを表す。このとき，S は $M(2,3)$ の部分ベクトル空間となることを示せ。

(3) $M(2,3)$ の部分ベクトル空間 N を

$$N = \{(a_{ij}) \in M(2,3) \mid a_{11} = a_{21} = 0\}$$

と定義する。このとき，$S \cap N$ の次元と基底を求めよ。ただし，S は (2) で定義した部分ベクトル空間とする。

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}^2$ で定義された関数

$$f(x,y) = x^2 y,$$
$$g(x,y) = x^2 + y^4$$

を考える。

(1)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y), \\ g(x,y) \ = \ 1 \end{cases}$$

を満たす実数の組 (x, y, λ) をすべて求めよ。

(2) 条件 $g(x,y) = 1$ の下で，関数 $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{4}$

(1) $0 < x < \pi$ において，$\log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$ を微分せよ。

(2) $D = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq 1\}$ とする。積分

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dxdy$$

を極座標変換を用いて計算せよ。

$\boxed{\mathrm{A}}$ 　G を群とする。G の任意の元 g は $g^2 = e$ (単位元) を満たすものとする。

(1) G の任意の元 a, b について，$aba^{-1}b^{-1} = e$ が成り立つことを示し，G が可換群であることを示せ。

(2) このような群 G の例を 2 つ挙げよ。

B　3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の2次元球面

$$S^2 = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \,\}$$

を考える。$p = (0,\, 0,\, 1)$ に対し，$U = S^2 - \{p\}$ とし，同相写像 $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ を次のように定義する：

U の点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ に対し， x と p を通る $\mathbb{R}^3$ 内の直線 ℓ をとる。ℓ と平面 $H = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \,\}$ との交点の座標を $(y_1, y_2, 0)$ としたとき， $\varphi(x) = (y_1, y_2)$ とする。

以下の問いに答えよ。

(1)　U の点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ に対して， $\varphi(x)$ を求めよ。

(2)　逆写像 $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to U$ を求めよ。

$\boxed{\mathrm{C}}$　微分方程式

$$x''(t) = -x(t) + x(t)^3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (*)$$

を考える。

(1)　$x(t)$ を $(*)$ の解とするとき，

$$E(t) = \frac{1}{2}x'(t)^2 + \frac{1}{2}x(t)^2 - \frac{1}{4}x(t)^4$$

は t によらない定数となることを示せ。

(2)　初期条件 $x(0) = 0,\ x'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす $(*)$ の解 $x(t)$ を求めよ。