埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

平成21年度 入学試験問題

数　　学

2008年8月19日　13:00 〜 15:00

注意事項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること.

2．$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること.

4．解答用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問20点とし，合計100点とする.

試験問題は，次ページからです.

$\boxed{1}$

α は定数であるとし，3 次正方行列 A と 3 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$ を次のように定める.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

(1) A の階数を求めよ.

(2) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす 3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在するように α の値を定めよ.

$\boxed{2}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．$P^{-1}AP$ が対角行列になるような 3 次の直交行列 P を一つ求め，そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ．

$\boxed{3}$

$f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数とし，$f(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$ となる点 (a,b) の近傍で $f(x,y)=0$ から定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ を考える．すなわち，$\varphi(x)$ は $f(x,\varphi(x))=0$, $\varphi(a)=b$ を満たすものとする．

(1) $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$ を f の 2 階までの偏導関数の点 (a,b) における値を用いて表せ．

(2) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ とする．

(i) $f(a,b)=f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$ となる点 (a,b) をすべて求めよ．

(ii) (i) で求めた点 (a,b) の近傍で定義される陰関数 $y=\varphi(x)$ は，$\varphi'(a)=0$ を満たすことを示せ．さらに，$\varphi(a)$ が極値になるか否かを判定せよ．

$\boxed{4}$

α は正定数とする．

(1)　広義積分 $\displaystyle\int_0^1 r^{-\alpha}dr$ が収束するための α の条件を求めよ．

(2)　$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\}$ とおく．広義積分

$$\iiint_B \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\alpha} dxdydz$$

が収束するための α の条件を求めよ．

$\boxed{\mathrm{A}}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．行列 A, B によって生成される群を G とする．ただし，群の演算は行列の積とする．

(1)　群 G の相異なる 6 個の元を求めよ.

(2)　群 G の位数は 6 であることを示せ.

(3)　群 G は巡回群でないことを示せ.

(4)　群 G は 3 次対称群 S_3 と同型であることを示せ.

$\boxed{\text{B}}$

球面 $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ の局所座標

$$\phi : U = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_3 < 0\} \to B = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 < 1\},$$

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$$

と，区間 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ で定義される B 内の曲線 $c(t) = (t, t^2)$ を考える．さらに，二つの写像

$$f : S^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2,$$

$$g_{_A} : S^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g_{_A}(x) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$

を考える．ただし，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ は直交行列である．

(1) 関数 $h = f \circ \phi^{-1} \circ c : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R}$ の導関数 $\frac{dh}{dt}(t)$ を求めよ．

(2) $x \in S^2$ について $g_{_A}(x)$ は S^2 上の点であることを示せ．

(3) 関数 $h_{_A} = f \circ g_{_A} \circ \phi^{-1} \circ c : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R}$ の $t = 0$ における微分係数 $\frac{dh_{_A}}{dt}(0)$ を求めよ．

$\boxed{\text{C}}$

z は複素数とする.

(1) $\sin z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ (a_k は定数) と展開したとき，a_k を k の式で表せ (答えのみでよい).

(2) $\dfrac{1}{2-z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ (b_k は定数) と展開したとき，b_k を求めよ．ただし，収束半径は求めなくてよい.

(3) 複素平面において，C は中心が原点 0，半径 1 の円周（向きは反時計まわり）とする．このとき，複素積分

$$\int_C \frac{\sin z}{z^4(2-z)}\, dz$$

の値を求めよ.