

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 数理電子情報系専攻・数学コース

平成 22 年 4 月入学・2 次募集

平成 22 年秋期入学

入学試験問題

数 学

2010 年 2 月 16 日 10:00 ~ 12:00

注 意 事 項

1.  1 ,  2 ,  3 ,  4 の 4 問は すべてに解答すること .
2.  A ,  B ,  C の中から , 1 問を選択し, 解答すること .
3. 答案用紙 1 枚につき 1 問ずつ , 計 5 問を解答すること .
4. 解答用紙は裏面も使用してよい .
5. 裏面を使用する場合は , その旨を表面に明記すること .
6. 配点は各問 20 点とし , 合計 100 点とする .

試験問題は、次ページからです。

1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 1 \\ a & 0 & 1 & c \\ b & 1 & 0 & d \\ 1 & c & d & 1 \end{pmatrix} \text{とおく. } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{のとき, 次の問いに答えよ.}$$

- (1)  $a, b, c, d$  を決定せよ.
- (2) 行列式  $|A|$  を求めよ.

行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $A$  の固有値を求めよ。
- (2)  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ) で定義された線形写像  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  について、その像空間  $T(\mathbb{R}^3)$  の基底を求めよ。

次の問いに答えよ。

- (1)  $f(x, y) = x^4 + 2x^2 - 8xy + 4y^2$  の 2 階までの偏導関数をすべて求めよ。
- (2)  $f(x, y)$  が極値をとる点とその値をすべて求めよ。

4

$\mathbb{R}$  上で定義された関数

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

について考える．次の問いに答えよ．

(1) 広義積分

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

を求めよ．

(2) 等式

$$f''(x) - f(x) = af(x)^3$$

が成り立つような定数  $a$  を求めよ．

A

$R$  は単位元  $1$  を持つ可換環とする．次の問いに答えよ．

- (1)  $R$  が体ならば， $R$  のイデアルは  $(0)$  と  $R$  自身のみに限られることを証明せよ．
- (2)  $I$  は  $R$  のイデアルとし， $a$  は  $R$  の元とする．

$$J = \{x \in R \mid ax \in I\}$$

とおくと， $J$  は  $R$  のイデアルであって， $I$  を含むことを証明せよ．

- (3) 体でない整域で，そのイデアルがすべて単項イデアルであるものの例を二つあげよ（証明は不要）．

B

次の問いに答えよ．

- (1) 位相空間  $X$  がハウスドルフ空間であることの定義を述べよ．
- (2) 距離空間はハウスドルフ空間であることを示せ．
- (3) 位相空間  $X$  がコンパクトであることの定義を述べよ．
- (4) コンパクトな位相空間とコンパクトでない位相空間の例を 1 つずつあげよ（証明は不要）．



C

与えられた連続関数  $f$  に対して,  $u$  を未知関数とする積分方程式

$$u(x) + \int_0^x u(t) dt = f(x)$$

を考える. 次の問いに答えよ.

- (1)  $v(x) = \int_0^x u(t) dt$  において,  $v$  が満たす微分方程式を導け.
- (2)  $v$  を  $f$  を用いて表せ.
- (3)  $u$  を  $f$  を用いて表せ.