埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

平成 22 年度 入学試験問題

数　　学

2009 年 8 月 18 日　13:00 〜 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問は <u>すべてに解答すること</u>.

2．$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$ の中から，<u>１問を選択し，解答すること</u>.

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること.

4．解答用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです.

$\boxed{1}$

実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 W を次のように定める.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

(1) W は $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は W の基底であることを示せ.

$\boxed{2}$

3 次元複素ベクトル空間 $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{C} \right\}$ を考え，$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．線形変換 $T : V \to V$ を，

$$X \mapsto PX{}^tP \qquad (X \in V)$$

と定義する．次の問いに答えよ．

(1)　V の元 $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ をとる．等式

$$T(X_j) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} X_i \qquad (j = 1,\, 2,\, 3)$$

によって定まる a_{ij} を (i, j) 成分とする 3 次正方行列 A を求めよ．

(2)　線形変換 T の固有値を求めよ．

$\boxed{3}$

$\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数 $f(u,v)$ に対し，

$$g(x,y) = f(x+y, xy)$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) g_x, g_y, g_{xx} を f の偏導関数を用いて表せ.

(2) $u^2 > 4v$ のとき，f_u, f_v を g の偏導関数を用いて表せ.

(3) $u^2 > 4v$ のとき，f_{vv} を g の偏導関数を用いて表せ.

$\boxed{4}$

$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\,\},$$
$$D_n = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq n\,\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $\alpha \neq 1, 2$ のとき，$\displaystyle\iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{(1+x+y)^\alpha}$ を計算せよ．

(2) $\alpha \neq 1, 2$ のとき，広義積分

$$\iint_{D} \frac{dx\,dy}{(1+x+y)^\alpha} \qquad \cdots\ (*)$$

を求めよ．

(3) $\alpha = 2$ のとき，$(*)$ の広義積分が収束するかどうか判定せよ．

A

次の問いに答えよ．

(1) 群の定義を書け．

(2) 整数全体のなす加法群 $\mathbb{Z}$ の部分群であって，$\{0\}$ とも $\mathbb{Z}$ 自身とも異なるものの例を一つ挙げよ．

(3) R は単位元 1 を持つ可換環とする．

(i) R の部分集合 I が R のイデアルであることの定義を書け．

(ii) R の部分集合 P が R の素イデアルであることの定義を書け．

(iii) R の部分集合 M が R の極大イデアルであることの定義を書け．

(4) 整数全体のなす環 $\mathbb{Z}$ の素イデアルの例を一つ挙げよ．

(5) 2 変数多項式環 $\mathbb{C}[X,Y]$ の極大イデアルの例を一つ挙げよ．

B

$\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$S^2 = \{\,(x_1,\,x_2,\,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\,\}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) S^2 が C^∞ 級多様体となるような局所座標近傍系の例を挙げよ．ただし，C^∞ 級であることを証明する必要はない．

(2) 射影 $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $\pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ で定義する．π の S^2 への制限を f とする．f が点 $(0, 0, 1)$ で C^∞ 級となることを示せ．

(3) f の臨界点全体の集合を求めよ．

$\boxed{\mathrm{C}}$

複素関数 $f(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1 - z^k}$ を考える．

(1) $f(z)$ は $|z| < 1$ において正則であることを示せ．

(2) $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ とべき級数展開する．係数 c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 を求めよ．