埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

平成 23 年 4 月入学・２次募集
平成 23 年秋期入学

入学試験問題

数　　学

2011 年 2 月 15 日　10:00 〜 12:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問は すべてに解答すること.

2．$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること.

4．解答用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ とおく.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $U^{-1}AU$ が対角行列になるようなユニタリ行列 U を 1 つ求めよ.

$\boxed{2}$

次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つベクトル空間 V において，2 つの零でないベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ が直交しているとする．このとき，ベクトル $\vec{u}+\vec{v},\ \vec{u}-\vec{v}$ は一次独立であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して，内積 $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ を

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 3x_2 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1$$

により定める．この内積に関して，次の問いに答えよ．

(i) ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に直交するベクトルで，長さが 1 のものを一つ求めよ．

(ii) $\mathbb{R}^2$ の部分ベクトル空間

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_2 = 0 \right\}$$

への直交射影によるベクトル $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の像を求めよ．

$\boxed{3}$

関数 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は $[0,\infty)$ で連続であり，$(0,\infty)$ で微分可能とする．さらに，次を満たす定数 $M > 0$ があるとする：

$$\text{任意の } x > 0 \text{ に対し，} |f'(x)| \leq M \text{ である．}$$

次の問いに答えよ．

(1) 任意の $x, y \geq 0$ に対し，$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ となることを示せ．

(2) f が $[0,\infty)$ で一様連続となることを示せ．

$\boxed{4}$

$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \bigl((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}\bigr) \\ \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0) \text{ のとき}\bigr) \end{cases}$$

により定める.

(1) $f_x(0,0)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0)$ は成立するか？ 理由を挙げて判定せよ.

(3) $f_{xx}(0,0)$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xx}(x,y) = f_{xx}(0,0)$ は成立するか？ 理由を挙げて判定せよ.

$\boxed{\text{A}}$

G は 3 次対称群（3 個の文字 1, 2, 3 の置換全体のなす群）とし，H は互換 $(1\,2)$ によって生成される G の部分群とする．次の問いに答えよ．

(1) G および H の位数を求めよ．

(2) G の元 σ_1, σ_2 に対して，$\sigma_1^{-1}\sigma_2 \in H$ であるときに $\sigma_1 \sim \sigma_2$ であると定義する．このとき，関係 $\sim$ は G 上の同値関係であることを示せ．

(3) $\sigma \in G$ に対して，$\sigma H = \{\, \sigma\tau \mid \tau \in H \,\}$ は，上の (2) で定めた同値関係による σ の同値類を表すものとする．このとき，G は互いに共通部分を持たない 3 個の部分集合 H, $(1\,3)H$, $(2\,3)H$ の和集合となることを示せ．

(4) 商集合 $G/H = \{\, \sigma H \mid \sigma \in G \,\}$ 上の演算を，$\sigma_1 H, \sigma_2 H \in G/H$ に対して

$$(\sigma_1 H)(\sigma_2 H) = (\sigma_1\sigma_2)H$$

によって矛盾なく定義することができるか？ 理由を挙げて判定せよ．

$\boxed{\text{B}}$

X はハウスドルフ空間であるとする．直積位相空間 $X \times X$ の部分位相空間 Δ を $\Delta = \{\,(x,x) \mid x \in X\,\}$ と定める．次の問いに答えよ．

(1) Δ の補集合は開集合であることを示せ．

(2) 写像 $f : X \to \Delta$ を，任意の $x \in X$ に対し $f(x) = (x,x)$ と定める．f が同相写像であることを示せ．

$\boxed{\text{C}}$

m, n は自然数で，$m < n$ とする．扇形 $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \dfrac{2\pi}{n},\ |z| \leq R \right\}$ の周に沿って $f(z) = \dfrac{z^{m-1}}{1+z^n}$ を積分することにより，広義積分

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx$$

の値を求めよ．