

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 数理電子情報系専攻・数学コース

平成 23 年 4 月入学，平成 22 年秋期入学

試験問題

数 学

2010 年 8 月 17 日 13:00 ~ 15:00

注 意 事 項

1. 1 , 2 , 3 , 4 の 4 問は すべてに解答すること .
2. A , B , C の中から , 1 問を選択し, 解答すること .
3. 答案用紙 1 枚につき 1 問ずつ , 計 5 問を解答すること .
4. 解答用紙は裏面も使用してよい .
5. 裏面を使用する場合は , その旨を表面に明記すること .
6. 配点は各問 20 点とし , 合計 100 点とする .

試験問題は、次ページからです。

1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{とおく.}$$

- (1) A の固有値を求めよ .
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような 4 次正則行列 P を 1 つ求めよ .

V は実ベクトル空間とする .

- (1) V の元 u_1, u_2, u_3 が一次独立であるならば , $u_1 + u_2, u_2 + 2u_3, u_3 - u_1$ も一次独立であることを示せ .
- (2) V の元 v と零元 0 を考える . 2つの元 $v, 0$ は一次従属であることを示せ .
- (3) v_1, v_2, v_3 は V の基底であるとする . 線形写像 $f : V \rightarrow V$ が

$$f(v_1) = v_1 + 2v_2 + 3v_3, \quad f(v_2) = v_2 + 2v_3, \quad f(v_3) = 2v_1 + 3v_2 + 4v_3$$

を満たしているとする . f の階数を求めよ .

3

\mathbb{R}^2 上で定義された関数 $f(x, y)$ は C^∞ 級とし,

$$g(u, v) = f(u^2 - v^2, 2uv)$$

とおく.

- (1) g_u, g_v を f_x, f_y を用いて表せ.
- (2) $f_{xx} + f_{yy} = 0$ のとき, $g_{uu} + g_{vv} = 0$ となることを示せ.

4

積分 $\iint_{\mathbb{R}^2} (x+y)^2 e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ を求めよ.

A

R および S は単位元を持つ可換環とする．次の問いに答えよ．

- (1) R のイデアルの定義を述べよ．
- (2) 環準同型写像 $\varphi : R \rightarrow S$ の核 $\text{Ker}(\varphi)$ は R のイデアルであることを証明せよ．
- (3) S が整域であるならば，環準同型写像 $\varphi : R \rightarrow S$ の核 $\text{Ker}(\varphi)$ は R の素イデアルであることを証明せよ．
- (4) $X^2 + 1$ で生成された $\mathbb{C}[X]$ のイデアルは，素イデアルでないことを示せ．ただし， $\mathbb{C}[X]$ は \mathbb{C} 上の多項式環を表す．

B

次の問いに答えよ．

- (1) ハウスドルフ空間の定義を述べよ．
- (2) ハウスドルフ空間の部分位相空間はハウスドルフ空間であることを示せ．
- (3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ は \mathbb{R}^2 と同相であることを示せ．ただし, \mathbb{R}^2 には通常の位相が入っているものとする．

C

次の問いに答えよ．

- (1) $a(x), b(x)$ は \mathbb{R} 上で定義された C^∞ 級関数とする．微分方程式

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

の解 y に対して，

$$u(x) = y(x) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^x a(s) ds\right)$$

とおけば， u は

$$u'' + P(x)u = 0$$

という形の微分方程式を満たすことを示せ．

- (2) (1) を用いて

$$y'' + 2xy' + x^2y = 0$$

の解で， $y(0) = 0$ ， $y'(0) = 1$ を満たすものを求めよ．