埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

平成 24 年 4 月入学・第 2 次募集
平成 24 年秋期入学

入学試験問題

数　　学

2012 年 2 月 21 日　10:00 ～ 12:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問は，すべてに解答すること．

2．$\boxed{A}$，$\boxed{B}$，$\boxed{C}$ の中から，１問を選択し，解答すること．

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること．

4．解答用紙は裏面も使用してよい．

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること．

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする．

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

$x > 0$ に対して，$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ とおく．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f''(x)$ を求めよ．

$\boxed{2}$

$a,\, b$ を正定数とし，$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ とおく．このとき，重積分

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$$

の値を求めよ．

$\boxed{3}$

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) 行列 A の固有値と固有空間を求めよ.

(2) 行列 A は対角化可能でないことを示せ.

$\boxed{4}$

$\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を次で定義する．

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

(1) W_1 及び W_2 の次元を求めよ．

(2) $W_1 \cap W_2$ の次元を求めよ．

(3) $W_1 + W_2$ の次元を求めよ．

$\boxed{\mathrm{A}}$

2 次元球面 $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ に対し，写像

$$f : S^2 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_2^2 x_3^2 \in \mathbb{R}$$

を考える．

(1) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_3 > 0\}$, $D = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 + u_2^2 < 1\}$ に対し，

S^2 の局所座標 $\phi : U \to D$ を $\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ と定める．

このとき，$f \circ \phi^{-1}(u_1, u_2) \quad ((u_1, u_2) \in D)$ を求めよ．

また，$\dfrac{\partial}{\partial u_1}(f \circ \phi^{-1})$ 及び $\dfrac{\partial}{\partial u_2}(f \circ \phi^{-1})$ を求めよ．

(2) f の臨界点を求めよ．

$\boxed{\text{B}}$

(1) $\dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{x(t)}{t}$ $(t > 0)$ の解は，$x(t) = ct$ (c は定数) に限ることを示せ．

(2) 関数 f は $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上で定義された実数値連続関数で

$$t > 0 \text{ に対し，} |f(t,x) - f(t,y)| \leq \frac{|x-y|}{t}$$

を満たすものとする．このとき，初期値問題

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \qquad (t > 0) \\ \displaystyle\lim_{t \to +0} x(t) = x_0 \end{cases}$$

を考える．

(a) x_1, x_2 が共に $(*)$ の解であるとすると，$t > 0$ において

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_1(t) - x_2(t)}{t}\right)^2 \leq 0$$

が成り立つことを示せ．

(b) $(*)$ の解は，存在すれば，ただ一つであることを示せ．

$\boxed{\text{C}}$

次の問いに答えよ．ただし，体 k 上の 1 変数多項式環 $k[X]$ が単項イデアル整域であることは既知とする．

(1)　次の (ア)〜(ウ) の記述のうち，正しいものを選び，それを証明せよ．

(ア)　$\mathbb{R}[X]/(X^2+2)$ は体である．

(イ)　$\mathbb{R}[X]/(X^2+2)$ は整域であるが，体ではない．

(ウ)　$\mathbb{R}[X]/(X^2+2)$ は整域でない．

(2)　次の (エ)〜(カ) の記述のうち，正しいものを選び，それを証明せよ．

(エ)　$\mathbb{R}[X]/(X^2-2)$ は体である．

(オ)　$\mathbb{R}[X]/(X^2-2)$ は整域であるが，体ではない．

(カ)　$\mathbb{R}[X]/(X^2-2)$ は整域でない．

(3)　次の (キ)〜(ケ) の記述のうち，正しいものを選び，それを証明せよ．

(キ)　$\mathbb{Q}[X]/(X^2-2)$ は体である．

(ク)　$\mathbb{Q}[X]/(X^2-2)$ は整域であるが，体ではない．

(ケ)　$\mathbb{Q}[X]/(X^2-2)$ は整域でない．