埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

平成 24 年 4月入学，平成 23 年秋期入学

試験問題

数　　学

2011 年 8月 16 日　13:00 ～ 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること.

2．$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること.

4．解答用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & c \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える．ただし，c は実数とする．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) B の行列式を求めよ．

(3) B の階数を求めよ．

$\boxed{2}$

ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の 2 元 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して，内積 $\langle x, y \rangle$ とノルム $\|x\|$ を

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

で定義する．$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 f が

任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

を満たすとする．

(1) 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| = 0$ を示せ．

(2) f は線形写像であることを示せ．

$\boxed{3}$

(1) $\mathbb{R}$ 上の C^2 級関数 $f(x)$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t) + f(-t) - 2f(0)}{t^2} = f''(0)$$

が成り立つことを示せ.

(2) a, b を実数とする．$\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数 $F(x, y)$ に対し，極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(ta, tb) + F(-ta, -tb) - 2F(0, 0)}{t^2}$$

を求めよ.

$\boxed{4}$

(1) 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

の値を求めよ.

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1/\sqrt{n}}^\infty \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx = 0$$

を示せ.

(3) 極限値

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1/\sqrt{n}}^\infty \frac{ne^{-x^2}}{1+n^2x^2}\,dx$$

を求めよ.

(4) 極限値

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{ne^{-x^2}}{1+n^2x^2}\,dx$$

を求めよ.

$\boxed{\text{A}}$

R および R' は単位元を持つ可換環とし，写像 $f : R \to R'$ は単位的準同型写像とする．ただし，f が単位的準同型写像であるとは，f が環の準同型写像であって，さらに $f(1_R) = 1_{R'}$ を満たすこととする．ここで，1_R および $1_{R'}$ はそれぞれ R, R' の単位元を表す．

また，$\mathrm{Ker} f = \{a \in R \mid f(a) = 0_{R'}\}$ とする．ここで，$0_{R'}$ は R' の零元を表す．

次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker} f$ は R のイデアルであることを示せ．

(2) R のイデアル I が $I \subset \mathrm{Ker} f$ を満たすとき，単位的準同型写像 $g : R/I \to R'$ であって，任意の $a \in R$ に対して $g(\bar{a}) = f(a)$ を満たすものが存在することを証明せよ．ただし，$\bar{a}$ は I を法とする R の剰余類であって a を代表元として持つものを表す．

(3) 小問 (2) の写像 g が単射であることと $I = \mathrm{Ker} f$ であることは同値であることを証明せよ．

$\boxed{\text{B}}$

集合 $X = \mathbb{R}^2$ 上の 2 点 $p = (x, y)$, $p' = (x', y')$ に対し，$d(p, p')$ を

$$d(p,p') = \begin{cases} |y - y'| & (x = x' \text{ のとき}) \\ |y| + |x - x'| + |y'| & (x \neq x' \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．このとき，(X, d) は距離空間となる．

(1) $a = (1, 1)$ とするとき, X の部分集合 $\{p \in X \mid d(p, a) < 2\}$ を図示せよ.

(2) $U = \{(x, y) \in X \mid x = 1,\ y > 1\}$ は (X, d) の開集合であることを示せ.

(3) $V = \{(x, y) \in X \mid x = 1,\ y \geq 1\}$ は (X, d) の閉集合であることを示せ.

(4) (X, d) の部分集合 $X - \{(1, 1)\}$ は連結でないことを示せ.

$\boxed{\mathrm{C}}$

$a(x)$, $b(x)$ は開区間 I 上の連続関数とする．$y_1(x)$, $y_2(x)$ を微分方程式

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

の解とし

$$w(x) = y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)$$

とおく.

(1) ある $x_0 \in I$ に対し，$w(x_0) = 0$ であるとすると，$w(x) \equiv 0$ $(x \in I)$ であることを示せ.

(2) $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ である定数 c_1, c_2 が存在して，$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \equiv 0$ $(x \in I)$ となるとき，$w(x) \equiv 0$ $(x \in I)$ であることを示せ.

(3) $w(x) \equiv 0$ $(x \in I)$ であるとき，$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \equiv 0$ $(x \in I)$, $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ となる定数 c_1, c_2 が存在することを示せ.