埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

平成 25 年 4 月入学，平成 25 年秋期入学

試験問題

数　　学

2013 年 2 月 19 日　10:00 〜 12:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の 4 問はすべてに解答すること．

2．$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$ の中から，1 問を選択し，解答すること．

3．答案用紙 1 枚につき 1 問ずつ，計 5 問を解答すること．

4．解答用紙は裏面も使用してよい．

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること．

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする．

試験問題は，次ページからです.

$\boxed{1}$

2 次形式 $q(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$ について次の問いに答えよ．

(1) $q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めよ．

(2) A の固有値を求め，さらに $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ．

(3) (2) で求めた直交行列 P を用いて，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と座標変換をしたとき，2 次形式 $q(x,y,z)$ を x', y', z' の式で表せ．

$\boxed{2}$

写像 $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

により定める.

(1) T は線形写像であることを示せ.

(2) T の核 $T^{-1}(\mathbf{0})$ を求めよ.

(3) V を $\mathbb{R}^4$ の 3 次元線形部分空間とする．このとき $\dim T(V)$ のとり得る値をすべて求め，さらにそれぞれの値を与える V の例を 1 つずつあげよ.

$\boxed{3}$

(1) 数列 $\{\, a_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ について，「 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 」の否定命題を述べよ．

(2) $\{\, a_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ はすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \geqq 0$ を満たす数列とする．また，$f(x)$ は $[0,\infty)$ 上の連続関数で，すべての $x \in [0,\infty)$ に対して $f(x) \geqq 0$ を満たすとする．このとき，次のそれぞれの主張について，正しければ証明を与え，誤りであれば反例をあげよ．

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であれば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ である．

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx < \infty$ であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ である．

$\boxed{4}$

$b > a > 0$ とし，$f(x)$ を $[0, \infty)$ 上で定義された C^1 級関数で，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_a^b \frac{f(ty)}{y}\, dy = C$ (C は定数) を満たすものとする．

(1) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_a^b \left\{ \int_0^t f'(xy)\, dx \right\} dy$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, dx = f(0) \log\left(\frac{a}{b}\right) + C$ を示せ．

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)\sin(\beta x)}{x}\, dx$ を求めよ．ただし，$\beta > \alpha > 0$ とする．

$\boxed{\text{A}}$

有限群について次の問いに答えよ．

(1) 有限群 G の位数と，元 $g \in G$ の位数の定義をそれぞれ述べよ．

(2) 素数位数の群は巡回群であることを示せ．

(3) G_1 が位数 3 の群であり，G_2 が位数 7 の群であれば，直積群 $G_1 \times G_2$ は巡回群であることを示せ．

$\boxed{\mathrm{B}}$

xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ において，xz 平面内の円

$$C = \left\{ \ (x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ (x-2)^2 + z^2 = 1 \ \right\}$$

を z 軸の周りに 1 回転して得られる回転面を S とする．次の問いに答えよ．

(1)　曲面 S の概形を描け．

(2)　曲面 S を媒介変数表示せよ．

(3)　$\mathbb{R}^3$ 上で定義された関数 $F(x, y, z) = x + y$ を S に制限して得られる関数を f とする．f の臨界点を求めよ．ただし，点 $p \in S$ が f の臨界点であるとは，$(df)_p = 0$ を満たすことである．

$\boxed{\mathrm{C}}$

微分方程式

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{2x+y}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1)　$y = xu$ とおき，$u = u(x)$ が満たす微分方程式を求めよ．

(2)　$(*)$ の解で $y(1) = 0$ となるものを求めよ．ただし，解の表示は陰関数の形で与えればよい．

(3)　$(*)$ の解で $y(1) = 1$ となるものを求めよ．