埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

平成 25 年 4 月入学，平成 24 年秋期入学

試験問題

数　　学

2012 年 8 月 16 日　13:00 〜 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の 4 問はすべてに解答すること．

2．$\boxed{A}$，$\boxed{B}$，$\boxed{C}$ の中から，1 問を選択し，解答すること．

3．答案用紙 1 枚につき 1 問ずつ，計 5 問を解答すること．

4．解答用紙は裏面も使用してよい．

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること．

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする．

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ．

$\boxed{2}$

次の (ア) から (ウ) の記述は正しいか，それとも誤りか．正しければ証明し，誤りであればその根拠を述べよ．

(ア) $\mathbb{R}^3$ の基底の選び方は有限通りしかない．

(イ) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \in \mathbb{R}^3$ が線形従属ならば，$\boldsymbol{x}_1$ は $\boldsymbol{x}_2$ と $\boldsymbol{x}_3$ の線形結合として表される．

(ウ) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \in \mathbb{R}^3$ が次の２つの条件 (a), (b) をともに満たすとする:

(a) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は線形独立である．

(b) $\boldsymbol{x}_3$ は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の線形結合としては表されない．

このとき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は線形独立である．

$\boxed{3}$

$g(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とし，$f(x,y) = g(x,y)\, e^{-x^2-y^2}$ とする．

(1) $f_x = f_y = 0$ となる点 (x,y) において

$$yg_x(x,y) - xg_y(x,y) = 0,$$

$$xg_x(x,y) + yg_y(x,y) = 2(x^2+y^2)g(x,y)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $g(x,y)$ が m 次の同次多項式であれば，f が極値をとる点 (x,y) において，$g(x,y) = 0$ または $x^2+y^2 = \dfrac{m}{2}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{4}$

(1) a を実数，$D_R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x + y < 2R,\, 0 < x - y < 2R \right\}$ $(R > 0)$ とし，積分

$$I(a, R) = \iint_{D_R} e^{-(x^2+axy+y^2)} dxdy$$

を考える．$x = u + v$, $y = u - v$ とおき，$I(a, R)$ を u, v を変数とする積分で表せ (積分値を求める必要はない)．

(2) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y > 0,\, x - y > 0 \right\}$ とする．広義積分

$$\iint_{D} e^{-(x^2+axy+y^2)} dxdy$$

が収束する a の範囲を求めよ．また，そのときの積分値を a を用いて表せ．必要ならば，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい．

A

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 2 変数多項式環 $R = \mathbb{C}[x,\, y]$ の部分集合

$$I = \{\, f(x,y) \in R \mid \text{すべての } a \in \mathbb{C} \text{ に対して } f(a,0) = 0\,\},$$

$$M = \{\, f(x,y) \in R \mid f(0,0) = 0\,\}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) I および M は R のイデアルであることを示せ．

(2) I は R の単項イデアルであることを示せ．

(3) M は R の極大イデアルであることを示せ．

B

Y を位相空間 X の部分位相空間とする．連続写像 $r : X \to Y$ で，任意の点 $y \in Y$ に対して $r(y) = y$ を満たすものが存在するときに Y は X のレトラクトであるという．次の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}^n$ には通常の位相が入っているものとする．

(1) 閉区間 $[0, 1]$ は $\mathbb{R}$ のレトラクトであることを示せ．

(2) S^1 を平面 $\mathbb{R}^2$ における単位円とする．S^1 は $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ のレトラクトであることを示せ．

(3) A を平面 $\mathbb{R}^2$ の相異なる 2 点からなる部分集合とする．A は $\mathbb{R}^2$ のレトラクトではないことを示せ．

$\boxed{\mathrm{C}}$

(1) べき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は，開円板 $\{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < R \,\}$ 上で収束しているとする．このとき，$0 \leqq r < R$ に対して

$$\int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \, r^{2n}$$

が成り立つことを示せ．ただし，i は虚数単位とする．

(2) $0 \leqq r < 1$ に対して

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \frac{2\pi}{1 - r^2}$$

が成り立つことを示せ．