埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

平成 26 年 4 月入学，平成 26 年秋期入学

試験問題

数　　学

2014 年 2 月 19 日　10:00 〜 12:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の 4 問は<u>すべてに解答すること</u>.

2．$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ の中から，<u>1 問を選択し，解答すること</u>.

3．答案用紙 1 枚につき 1 問ずつ，計 5 問を解答すること.

4．答案用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 6 \\ -4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$ とする．

(1)　A の固有値をすべて求めよ．

(2)　$P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P を一つ求め，さらに，そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ．

$\boxed{2}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ とする.

(1) A の階数と行列式を求めよ.

(2) $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義される線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ の核の次元と基底を一組求めよ.

$\boxed{3}$

$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq x^2,\ 0 \leqq x \leqq 1 \right\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{x+1}\,dxdy$ を計算せよ．

$\boxed{4}$

$f(x) = \sin^{-1} x \quad (|x| < 1)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $(1 - x^2)f''(x) - xf'(x) = 0 \quad (|x| < 1)$ を示せ．

(2) n を自然数とする．$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0 \quad (|x| < 1)$ を示せ．

(3) $f^{(5)}(0)$ を求めよ．

$\boxed{\text{A}}$

(1)　3次対称群 S_3 の元 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の位数を求めよ.

(2)　(1) の σ を含む S_3 の部分群をすべて求めよ.

(3)　一般に群 G の部分群 H が G の正規部分群であることの定義を述べよ.

(4)　(2) で求めた部分群が S_3 の正規部分群であるかどうかを判定せよ.

$\boxed{\mathrm{B}}$

X を空でない集合とする．

(1)　写像 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が X 上の距離関数であることの定義を述べよ．

(2)　d を X 上の距離関数とする．このとき，

$$\widetilde{d}\,(x, y) = \min\left\{\, d\,(x, y),\, 1\right\} \qquad (x, y \in X)$$

で定義される写像 $\widetilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ は X 上の距離関数であることを示せ．

(3)　$X = \mathbb{R}^2$ とし，$x = (x_1, x_2),\, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$d\,(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad \widetilde{d}\,(x, y) = \min\left\{\, d\,(x, y),\, 1\right\}$$

とする．$r > 0$ に対して，$\mathbb{R}^2$ の部分集合 $B_r(\mathrm{O})$ を

$$B_r(\mathrm{O}) = \left\{\, x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \widetilde{d}\,(x, \mathrm{O}) < r \,\right\} \quad (\mathrm{O} = (0, 0))$$

と定めるとき，$B_{\frac{1}{2}}(\mathrm{O}),\, B_1(\mathrm{O}),\, B_2(\mathrm{O})$ をそれぞれ図示せよ．

$\boxed{\text{C}}$

a, b, c, d を定数とし，連立微分方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x_1'(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t), \\ x_2'(t) = c\,x_1(t) + d\,x_2(t) \end{cases} \qquad (\, t \in \mathbb{R}\,)$$

を考える．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

とおくことにより，方程式 $(*)$ を

$$(**) \qquad \boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t) \qquad (\, t \in \mathbb{R}\,)$$

と表す．いま，A は相異なる２つの固有値 λ_1, λ_2 を持つとする．また，２次正方行列 P_1, P_2 は，

$$P_1 + P_2 = E,$$

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = A$$

を満たすものとする．ただし，E は２次単位行列とする．以下の問いに答えよ．

(1)　P_1, P_2 を $A, E, \lambda_1, \lambda_2$ を用いて表せ．

(2)　$P_1 P_2 = O$ および $P_1^2 = P_1$ が成り立つことを示せ．ただし，O は２次零行列とする．

(3)　$\boldsymbol{x}(t)$ を $(**)$ の解とし，$\boldsymbol{y}(t) = P_1 \boldsymbol{x}(t)$ とおく．

　(i)　$\boldsymbol{y}(t)$ が満たす微分方程式を λ_1 を用いて表せ．

　(ii)　$\lambda_1 < 0$ であるとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{0}$ であることを示せ．