埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

平成 26 年 4月入学，平成 25 年秋期入学

試験問題

数　　学

2013年 8月19日　13:00 〜 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること．

2．$\boxed{A}$，$\boxed{B}$，$\boxed{C}$ の中から，１問を選択し，解答すること．

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること．

4．答案用紙は裏面も使用してよい．

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること．

6．配点は各問20点とし，合計100点とする．

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ と自然数 n に対して，A^n を求めよ．

$\boxed{2}$

(1) k を実数とし，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ k \end{pmatrix}$$

を考える．$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ が一次独立となるための k の条件を求めよ．

(2) V を内積を持つ線形空間とし，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1} \in V$ は一次独立であるとする．$\boldsymbol{v}_n \in V \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ と直交するとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{v}_n$ は一次独立であることを示せ．

$\boxed{3}$

$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq x \right\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\ dxdy$ を計算せよ．

$\boxed{4}$

平面 $\mathbb{R}^2$ で定義された関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ は原点において連続かどうか調べよ．

(3) $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ を求めよ．

$\boxed{\text{A}}$

(1) 群 G の位数の定義を述べよ．また，元 $g \in G$ の位数の定義を述べよ．

(2) 群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の任意の元の位数は 1 または 2 であることを示せ．

(3) 群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は同型でないことを示せ．

(4) 群 G_1, G_2 の間の群準同型写像 $\varphi : G_1 \to G_2$ と，有限位数の元 $g \in G_1$ に対して，$\varphi(g) \in G_2$ の位数は g の位数を割り切ることを示せ．

$\boxed{\text{B}}$

(1)　実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合族

$$\mathscr{O} := \left\{ A \subset \mathbb{R} \,\middle|\, A = \emptyset,\ A = \mathbb{R} \text{ または } \mathbb{R} \backslash A \text{ が有限集合} \right\}$$

は位相空間の開集合族の公理を満たすことを示せ．

(2)　位相空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ はハウスドルフ空間ではないことを示せ．

(3)　$\mathbb{R}$ の通常のユークリッド位相を $\mathscr{O}_E$ とする．このとき，$\mathbb{R}$ 上の恒等写像は，位相空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ から $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_E)$ への写像として，連続ではないことを示せ．

$\boxed{\mathrm{C}}$

a, b, c, d を定数とし，連立微分方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x_1'(t) = a x_1(t) + b x_2(t), \\ \\ x_2'(t) = c x_1(t) + d x_2(t) \end{cases} \qquad (\, t \in \mathbb{R}\,)$$

を考える．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

とおくことにより，方程式 $(*)$ を

$$(**) \qquad \boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t) \qquad (\, t \in \mathbb{R}\,)$$

と表す．次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}_0$ を A の固有値 λ の固有ベクトルとすると，$e^{\lambda t}\boldsymbol{x}_0$ は $(**)$ を満たすことを示せ．

(2) $\boldsymbol{x}(t)$ を $(**)$ の解で，ある t_0 で $\boldsymbol{x}(t_0)$ が A の固有値 λ の固有ベクトルになるものとする．このとき，任意の t に対して $\boldsymbol{x}(t)$ は A の固有値 λ の固有ベクトルであることを示せ．

(3) A は相異なる固有値 λ_1, λ_2 を持つとし，λ_i に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_i$ とする $(i = 1, 2)$．このとき，$(**)$ の任意の解は

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t}\, \boldsymbol{p}_1 + c_2\, e^{\lambda_2 t}\, \boldsymbol{p}_2 \qquad (\, c_1, c_2 \text{ は定数}\,)$$

と表されることを示せ．