埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻　数学コース

平成 27 年 4月入学・平成 27 年秋期入学

試験問題

数　　学

2015年 2月18日　10:00 〜 12:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること．

2．$\boxed{A}$，$\boxed{B}$，$\boxed{C}$ の中から，１問を選択し，解答すること．

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること．

4．答案用紙は裏面も使用してよい．

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること．

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする．

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を 1 つ求めよ．

$\boxed{2}$

$M_2(\mathbb{R})$ を 2 次の実正方行列全体からなる実ベクトル空間とする．ただし，演算は通常のものを考える．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ とし，$M_2(\mathbb{R})$ から $M_2(\mathbb{R})$ 自身への写像

$$\varphi\colon M_2(\mathbb{R}) \ni X \mapsto AX \in M_2(\mathbb{R})$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) φ は線形写像であることを示せ．

(2) $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底になることを示せ．

(3) 基底 $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ に関する φ の表現行列を求めよ．

(4) φ が同型写像であることと，A が正則行列であることは，同値であることを示せ．

$\boxed{3}$

$a > b > 0$ とし，$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めよ．

(2) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点をすべて求めよ．

(3) 点 $(0,1)$ で f は極値をとらないことを示せ．

$\boxed{4}$

以下の問いに答えよ.

(1) 極座標に変換することにより $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ を求めよ.

$\boxed{\text{A}}$

以下の問いに答えよ．ただし (1), (2), (3) においては，R は単位元 1 を持つ可換環とする．

(1)　R の元 x が R の可逆元 (単元) であることの定義を述べよ．

(2)　集合 $\{ x \in R \,|\, x \text{ は } R \text{ の可逆元} \}$ は乗法に関して群をなすことを示せ．

(3)　R のイデアル I が R の可逆元を含むならば，$I = R$ であることを示せ．

(4)　p を素数とするとき，剰余環 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の可逆元は何個あるか．

(5)　剰余環 $\mathbb{C}[t]/(t^2-1)$ の元 $\overline{t}$ は，$\mathbb{C}[t]/(t^2-1)$ の可逆元であるか，そうでないかを判定せよ．ただし，$\overline{t}$ は $\mathbb{C}[t]$ の元 t に対応する $\mathbb{C}[t]/(t^2-1)$ の元とする．

$\boxed{\text{B}}$

以下の問いに答えよ．

(1) X をコンパクトな位相空間とする．このとき，X の閉集合 A はコンパクトであることを示せ．

(2) 2 次元 C^∞ 多様体 M の開集合 U が 2 つの局所座標 $\phi : U \to \bigl(\mathbb{R}^2, (x_1, x_2)\bigr)$ および $\psi : U \to \bigl(\mathbb{R}^2, (y_1, y_2)\bigr)$ を持ち，座標変換 $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(U)$ が

$$(x_1, x_2) \mapsto (2x_1 + 3x_2, x_1 + 2x_2)$$

で与えられているとする．このとき，U の点 P における接ベクトル

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_P + \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_P$$

を接ベクトル $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_P, \left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)_P$ の 1 次結合として表せ．

$\boxed{\mathrm{C}}$

$a > 0$ とし，微分方程式

$$(*) \quad x''(t) - 2\,x'(t) + (1 - a^2)\,x(t) = 0$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　$(*)$ の一般解を求めよ．

(2)　$(*)$ の解 $x(t)$ で，初期条件 $x(0) = 1,\ x'(0) = 2$ を満たすもの求めよ．

(3)　(2) で求めた解 $x(t)$ について，$\displaystyle\lim_{a \to +0} x(t)$ を求めよ．