埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

平成 27 年 4 月入学，平成 26 年秋期入学

試験問題

数　　学

2014 年 8 月 19 日　13:00 ～ 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の 4 問はすべてに解答すること.

2．$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ の中から，1 問を選択し，解答すること.

3．答案用紙 1 枚につき 1 問ずつ，計 5 問を解答すること.

4．答案用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 4 \\ -4 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ とする.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を 1 つ求めよ.

$\boxed{2}$

V, W をそれぞれ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5\}, \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ を基底とする実ベクトル空間とし，$f : V \longrightarrow W$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3,\ f(\boldsymbol{v}_2) = a\,\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_3,\ f(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{w}_2 + 2\,\boldsymbol{w}_3,$$

$$f(\boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + b\,\boldsymbol{w}_3,\ f(\boldsymbol{v}_5) = \boldsymbol{w}_1 - 2\,\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_3$$

で定まる線形写像とする．f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元が 3 となるような a, b の値を求めよ．

$\boxed{3}$

次の問いに答えよ．

(1) $p > 0$ を定数とする．$\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^p e^{-t} = 0$ を示せ．

(2)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0), \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

とおく．このとき，関数 $f(x)$ は $x = 0$ で 2 回微分可能であることを示し，$f'(0)$, $f''(0)$ を求めよ．

$\boxed{4}$

次の問いに答えよ．

(1) $A > 0$ を定数とする．このとき，不定積分

$$\int \sqrt{A^2 - x^2}\, dx$$

を求めよ．

(2) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq x,\ 0 \leqq x \leqq 1 \right\}$ に対して，重積分

$$\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

を求めよ．

$\boxed{\text{A}}$

$\alpha \in \mathbb{C}$ とする．$\mathbb{R}$ 上の 1 変数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ から体 $\mathbb{C}$ への準同型写像 $\varphi_\alpha : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$ を，$\varphi_\alpha(f(x)) = f(\alpha)$ ($f(x) \in \mathbb{R}[x]$) により定める．次の問いに答えよ．

(1) φ_α の核 $\mathrm{Ker}\,(\varphi_\alpha)$ は $\mathbb{R}[x]$ のイデアルであることを示せ．

(2) $\mathrm{Ker}\,(\varphi_\alpha)$ は $\mathbb{R}[x]$ の素イデアルであるかどうかを，理由をつけて判定せよ．

(3) $\alpha = 2$ のとき，$\mathrm{Ker}\,(\varphi_\alpha) = \big(p(x)\big)$ となる多項式 $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ を 1 つ求めよ．

(4) $\alpha = \sqrt{-1}$ のとき，$\mathrm{Ker}\,(\varphi_\alpha) = \big(q(x)\big)$ となる多項式 $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ を 1 つ求めよ．

$\boxed{\text{B}}$

次の問いに答えよ．ただし，(1), (2) では実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に標準的距離を付随しておく．

(1) 開区間 (a, b) は $\mathbb{R}$ の開集合であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ の部分距離空間 $X = \{1\} \cup [\,2, \infty)$ から $\mathbb{R}$ への写像 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ を次で定義する:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 1), \\ \\ x^2 & (x \geqq 2). \end{cases}$$

このとき，写像 f は $x = 1$ で連続であるかどうかを，理由をつけて判定せよ．

(3) 2 次元 C^∞-多様体 $S^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$ の，次の 2 つの C^∞-座標近傍 (U, φ), (V, ψ) を考える:

$$U = \left\{ (x, y, z) \in S^2 \,\middle|\, z \neq 1 \right\} \ni (x, y, z) \mapsto \varphi(x, y, z) \in \big(\mathbb{R}^2, (u_1, u_2)\big),$$

$\varphi(x, y, z)$ は $(0, 0, 1)$ と (x, y, z) を通る直線と xy 平面との交点の座標である．

（ $\big(\mathbb{R}^2, (u_1, u_2)\big)$ は u_1 軸，u_2 軸を直交軸に持つ平面のことである．）

$$V = \left\{ (x, y, z) \in S^2 \,\middle|\, y > 0 \right\} \ni (x, y, z) \mapsto \psi(x, y, z) = (x, z) \in \big(\mathbb{R}^2, (v_1, v_2)\big)$$

このとき，点 $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in U \cap V$ における接ベクトル $\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_P$ を，$\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)_P$ と $\left(\frac{\partial}{\partial v_2}\right)_P$ の 1 次結合として表せ．

$\boxed{\mathrm{C}}$

実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して，次の微分方程式の初期値問題 $(*)$ を考える．

$$(*) \qquad x'(t)\,|\,x(t)\,|^{\frac{2}{3}} = x(t), \quad x(0) = a$$

(1) $(*)$ を満たす C^1-級関数 $x(t)$ に対して，$x(t)^2$ は t に関して単調増加であることを示せ．

(2) $a = 0$ とする．このとき任意の $t_0 > 0$ に対して，次で定義される関数 $x(t)$ は C^1-級であり，$(*)$ を満たすことを示せ．

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t < t_0), \\ \left(\frac{2}{3}(t - t_0)\right)^{\frac{3}{2}} & (t \geqq t_0). \end{cases}$$

(3) $a = 1$ とする．このとき $t \geqq 0$ における $(*)$ の解を求めよ．