埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻　数学コース

平成 28 年 4月入学・平成 28 年秋期入学

試験問題

数　　学

2016 年 2月 17 日　10:00 ～ 12:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること.

2．$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること.

4．答案用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有空間をすべて求めよ．

(2) 「A が対角化可能であるか否か」について，理由を付した上で判定せよ．

$\boxed{2}$

3 次元線形空間 $\mathbb{R}^3$ を考える．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ を

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = -x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2$$

により定める．また，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とし，$V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} \rangle = 0\}$ と定める．
以下の問いに答えよ．

(1) V は $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間であることを示し，V の基底を 1 組求めよ．

(2) 任意の元 $\boldsymbol{x} \in V - \{\boldsymbol{0}\}$ に対して，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$ が成立することを示せ．

$\boxed{3}$

関数 $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^4 - x^2y^2 - \dfrac{3}{4}y^4$ に対し，以下の問いに答えよ．

(1) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた点のうち，f の鞍点であるものをすべて求めよ．

$\boxed{4}$

$\sin^{-1} x$ は x の逆正弦関数を表すものとする．以下の問いに答えよ．

(1) $(\sin^{-1} x)'$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int \sin^{-1} x \, dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int (\sin^{-1} x)^3 \, dx$ を求めよ．

$\boxed{\text{A}}$

R を可換環とし，I をそのイデアルとする．また，$\mathbb{C}[x,y]$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 2 変数多項式環とする．以下の問いに答えよ．

(1) I が素イデアルであることの定義を述べよ．

(2) I が極大イデアルであることの定義を述べよ．

(3) 零イデアルでなく，極大イデアルでもない $\mathbb{C}[x,y]$ の素イデアルの例を 1 つ挙げよ．ただし，その事実を証明する必要はない．

(4) $\mathbb{C}[x,y]$ の極大イデアルの例を 1 つ挙げ，その例が極大イデアルであることを示せ．

$\boxed{\mathrm{B}}$

以下の問いに答えよ．

(1) 位相空間 X がコンパクトであるとき，その閉部分空間はコンパクトであることを示せ．

(2) ホモトピー同値であるが同相でない 2 つの位相空間の例を挙げよ．ただし，その事実を証明する必要はない．

$\boxed{\text{C}}$

D を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の空でない連結開集合とし，

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad \bigl(z = x + iy \in D \ \ (x, y \in \mathbb{R}),\ u,\ v \text{ は実数値関数}\bigr)$$

を D 上の正則関数とする．以下の問いに答えよ．

(1) u, v が満たす Cauchy-Riemann の関係式を書け．

(2) $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$ を示せ．

(3) $|f(z)|$ が D 上定数であるとき，$f(z)$ も D 上定数であることを示せ．