

埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程 数理電子情報系専攻・数学コース

平成 28 年 4 月入学，平成 27 年秋期入学

試験問題

数 学

2015 年 8 月 19 日 13:00 ～ 15:00

注 意 事 項

1. $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ ， $\boxed{4}$ の 4 問は すべてに解答すること。
2. $\boxed{A}$ ， $\boxed{B}$ ， $\boxed{C}$ の中から，1 問を選択し，解答すること。
3. 答案用紙 1 枚につき 1 問ずつ，計 5 問を解答すること。
4. 答案用紙は裏面も使用してよい。
5. 裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること。
6. 配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする。

試験問題は、次ページからです。

正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える.

- (1) x_1, x_2, x_3 に関する連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

を解け.

- (2) A の固有値を求めよ.

- (3) A を対角化するような正則行列 P を 1 つ求めよ. また, そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ.

V を有限次元の実ベクトル空間とし, $f: V \rightarrow V$ を $f \circ f = f$ を満たす線形写像とする. 次の問いに答えよ.

- (1) f を部分空間 $\text{Im}(f)$ に制限したものは $\text{Im}(f)$ の恒等写像であることを示せ.
- (2) V の任意の元は, $\text{Ker}(f)$ と $\text{Im}(f)$ の元の和として表されることを示せ.
- (3) $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{\mathbf{0}\}$ であることを示せ.

次の問いに答えよ.

- (1) 実数 x, y, λ に対して

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$$

とおく.

$$F_x(x, y, \lambda) = F_y(x, y, \lambda) = F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

を満たす x, y, λ の組をすべて求めよ.

- (2) 条件 $x^2 + xy + y^2 = 1$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の下で, 関数

$$f(x, y) = xy$$

の最大値と最小値を求めよ.

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$ に対し,

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy$$

とする. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と変数変換し, I の値を求めよ.

A

G を群 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ とし, H を G の部分群とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 群の位数の定義を述べよ.
- (2) 部分群 H の位数は 1, 3 または 9 であることを示せ.
- (3) 部分群 H の位数が 3 ならば, H は巡回群であることを示せ.
- (4) 群 G の部分群をすべて求め, その個数を答えよ.

B

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に，通常距離から定まる位相を与える．次の問いに答えよ．

- (1) $\mathbb{R}$ の部分集合 U が開集合であることの定義を述べよ．
- (2) $\mathbb{R} - \{0\}$ は開集合であることを示せ．
- (3) $\mathbb{Q}$ を有理数全体の集合とする．このとき， $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ は開集合ではないことを示せ．

C

微分方程式

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (*)$$

を考える． y が未知の実数値関数， P, Q は既知の実数値連続関数とする．次の問いに答えよ．

- (1) $y(0) = a$ を満たす解を P, Q, a を用いて表せ．
- (2) $P(x) > \delta$ を満たす x に依らない正定数 δ が存在するとする． y_1, y_2 をそれぞれ微分方程式 $(*)$ の解で $y_i(0) = a_i$ ($i = 1, 2$) を満たすものとする．このとき，

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |y_1(x) - y_2(x)| = 0$$

となることを示せ．