埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

平成 29 年 4月入学，平成 28 年秋期入学

試験問題

数　　　学

2016 年 8月 22 日　13:00 〜 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること.

2．$\boxed{A}$，$\boxed{B}$，$\boxed{C}$ の中から，１問を選択し，解答すること.

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること.

4．答案用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

とする．次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A を対角化するような正則行列 P を 1 つ求めよ．また，そのときの $P^{-1}AP$ も記せ.

$\boxed{2}$

V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし，V の元 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ をとる．次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は 1 次独立であるとする．このとき，$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, 2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) V は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ で生成されているとする．このとき，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は 1 次従属であることを示せ．

(3) 次の命題の否定命題を述べよ．

「V の任意の元は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の 1 次結合として表される.」

(4) 次の命題の否定命題を述べよ．

「$\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の 1 次結合として表せるならば，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ である.」

$\boxed{3}$

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $(0, \infty)$ で 2 回微分可能な関数とする．$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ に対して，u を

$$u(x, y, z) = f(r) \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ \right)$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ を計算せよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{1}{r} \dfrac{d^2}{dr^2}\Big(r f(r) \Big)$ が成り立つことを示せ．

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ であれば，$f(r) = \dfrac{a}{r} + b$（a，b は定数）となることを示せ．

$\boxed{4}$

次の問いに答えよ．

(1) $n \geq 2$ とし，$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq n,\ 1 \leq xy \leq 2\}$ とする．

$$\iint_{D_n} xye^{-x^2y^2}\,dxdy$$

の値を求めよ．

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とする．広義積分

$$\iint_{D} xye^{-x^2y^2}\,dxdy$$

の収束・発散を調べよ．

$\boxed{\mathrm{A}}$

実数係数の 1 変数多項式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ について，次の問いに答えよ．

(1) 定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ について $f(\alpha) = 0$ であるときには，$f(x)$ は $\mathbb{R}[x]$ 内で $x - \alpha$ で割り切れることを示せ．

(2) $f(x)$ の次数が 3 であるときには $f(x)$ が既約多項式でないことを，小問 (1) を用いて示せ．

(3) $f(x)$ の次数は 3 であり，$f(x) = 0$ は $\mathbb{C}$ 内に重根を持つと仮定する．このとき，$f(x) = 0$ のすべての根は実数であることを示せ．

$\boxed{\text{B}}$

$\mathbb{R}$ の部分集合 A に対して A^i を

$$A^i = \{x \in A \mid \text{ある}\, \varepsilon > 0\, \text{が存在して，}\, (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A\}$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}$ の部分集合 A, B が $A \subset B$ を満たすならば，$A^i \subset B^i$ であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ の部分集合 A, B に対して，$A^i \cup B^i \subset (A \cup B)^i$ が成り立つことを示せ．

(3) $(\,0,\, 1\,]^i = (\,0,\, 1)$ を示せ．

(4) $A^i \cup B^i \neq (A \cup B)^i$ となるような $\mathbb{R}$ の部分集合 A, B の例を挙げよ．

$\boxed{\mathrm{C}}$

α, β は正の実数とする．次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $C: z(t) = \alpha \cos t + i\beta \sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$ を複素平面上に図示せよ．

(2) 小問 (1) の関数 $z(t)$ に対し

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = u(t) + iv(t)$$

を満たす 2 つの関数 $u, v : [\,0,\, 2\pi\,] \to \mathbb{R}$ を求めよ．

(3) 小問 (1) の曲線 C に対して，次の複素積分を求めよ．ただし，C には t が 0 から 2π まで動く向きを入れて考える．

$$\int_C \frac{1}{z}\, dz$$

(4) 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\alpha^2 \cos^2 t + \beta^2 \sin^2 t}$$