埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

令和 2 年 4 月入学，令和元年秋期入学

試験問題

数　　　学

2019 年 8 月 21 日　13:00 〜 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問は<u>すべてに解答すること</u>.

2．$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ の中から，<u>１問を選択し，解答すること</u>.

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること.

4．答案用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです.

$\boxed{1}$

行列 A を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列であるような行列 P を一つ求めよ. また, そのときの $P^{-1}AP$ を記せ.

$\boxed{2}$

(1)　実変数 x_1, x_2, x_3, x_4 に関する次の連立一次方程式が解をもつための実数 k の条件を記せ．そしてそのときの一般解を求めよ．

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = k \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

(2)　$f : V \to W$ をベクトル空間 V からベクトル空間 W への同型写像とする．$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とするとき，$f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W の基底となることを示せ．

$\boxed{3}$

2 変数関数 f を次で定義する．

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (\ x=y \quad \text{かつ} \quad (x,y)\neq(0,0) \quad \text{のとき}\ ) \\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

(1)　f は $(x,y)=(0,0)$ において連続か．

(2)　$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ．

(3)　$f_{xx}(0,0)$, $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$, $f_{yy}(0,0)$ を求めよ．

$\boxed{4}$

積分順序を交換することにより，次の積分値を求めよ.

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\, dydx$$

$\boxed{\text{A}}$

$\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ を位数が 2 の有限体とし，$\mathbb{F}_2[X]$ を体 $\mathbb{F}_2$ 上の 1 変数多項式環とする．

(1) $\mathbb{F}_2[X]$ に属する 2 次多項式をすべて書け．

$\mathbb{F}_2[X]$ の元 $f(X), g(X)$ をそれぞれ $f(X) = X^2 + 1,\ g(X) = X^2 + X + 1$ とする．

(2) $\mathbb{F}_2$ における $f(X)$ の根をすべて求めよ．

(3) $g(X)$ は既約多項式であることを示せ．

(4) $\mathbb{F}_2[X]$ に属する 2 次多項式のうち，既約多項式であるものは $g(X)$ に限られることを示せ．

(5) $g(X)$ で生成される $\mathbb{F}_2[X]$ のイデアル $(g(X))$ は $\mathbb{F}_2[X]$ の極大イデアルであることを示せ．

$\boxed{\mathrm{B}}$

$A \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して，} (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$$

とおく．$\overline{A} \subset A$ が成り立つとき，A を $\mathbb{R}$ の閉集合と呼ぶ．

(1) 閉区間 $[0, 1]$ は $\mathbb{R}$ の閉集合であることを示せ．

(2) $A_1, \cdots, A_n$ を $\mathbb{R}$ の閉集合とすると，和集合

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

も $\mathbb{R}$ の閉集合であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}$ の閉集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で，和集合

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

が $\mathbb{R}$ の閉集合にならないような例を挙げ，その $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ が閉集合にならないことを示せ．

$\boxed{\text{C}}$

関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が次の条件を満たすとする．

- f は閉区間 $[0,1]$ 上で連続 かつ 開区間 $(0,1)$ 上で微分可能
- $f(0) = 0$
- すべての $x \in (0,1)$ に対して $|f'(x)| \le |f(x)|$

(1)　$x_0 \in (0,1)$ とする．次を定める．

$$M_0 = \sup_{0 \le x \le x_0} |f(x)|, \qquad M_1 = \sup_{0 < x < x_0} |f'(x)|$$

(ア)　$M_1 \le M_0 < \infty$ を示せ．

(イ)　すべての $x \in [0, x_0]$ に対して $|f(x)| \le M_1 x$ が成立することを示せ．

(ウ)　もし $M_0 > 0$ ならば，すべての $x \in [0, x_0]$ に対して $|f(x)| < M_0$ が成立することを示せ．

(2)　すべての $x \in [0,1]$ に対して，$f(x) = 0$ であることを示せ．