埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

平成 30 年 4月入学，平成 29 年秋期入学

試験問題

数　　学

2017年 8月21日　13:00 〜 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること.

2．$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.

3．答案用紙１枚につき１問ずつ，計５問を解答すること.

4．答案用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです.

$\boxed{1}$

2 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列であるような直交行列 P を 1 つ求めよ．また，そのときの $P^{-1}AP$ も記せ．

$\boxed{2}$

ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において，ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の張る部分空間を W とする．次の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}^3$ には通常の内積を付随させておく．

(1)　W の直交補空間の基底を求めよ．

(2)　W への直交射影によるベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の像を求めよ．

$\boxed{3}$

1 変数関数 φ は有界で $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=1$ を満たすものとし，2 変数関数 f を

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\,\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)-y^2\,\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right) & (x\neq 0 \text{ かつ } y\neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x=0 \text{ または } y=0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ を求めよ．

(2) $y\neq 0$ のとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ を求めよ．

(3) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$ を求めよ．

(4) $f(x,y)=-f(y,x)$ を利用して，$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$ を求めよ．

$\boxed{4}$

次の問いに答えよ．

(1) $t = \tan\theta$ とおくことにより，広義積分

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

の値を求めよ．

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とする．変数変換 $u = x - y$, $v = x + y$ を用いて，広義積分

$$\iint_D \frac{\sqrt{xy}}{\left(1+(x+y)^2\right)^2}\,dxdy$$

の値を求めよ．

$\boxed{\text{A}}$

R は単位元 1 を持つ可換環とし，I_1, I_2 は R のイデアルとする．また，$a \in R$ に対して，(a) は a で生成された R のイデアルを表すものとする．次の問いに答えよ．

(1) $I_1 \cap I_2$ は R のイデアルであることを示せ．

(2) $I_1 + I_2 = \left\{ z_1 + z_2 \,|\, z_1 \in I_1,\, z_2 \in I_2 \right\}$ は R のイデアルであることを示せ．

(3) $R = \mathbb{Z},\, I_1 = (6),\, I_2 = (8)$ とする．

（ア）$I_1 \cap I_2 = (24)$ を示せ．

（イ）$I_1 + I_2 = (2)$ を示せ．

$\boxed{\text{B}}$

(1) 位相空間 X の部分集合 A がコンパクトであることの定義を述べよ.

(2) 位相空間 X の部分集合 A が連結であることの定義を述べよ.

(3) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に通常の距離から定まる位相を入れる.

(ア) 開区間 $(0, 1)$ はコンパクトではないことを示せ.

(イ) $\mathbb{R} - \{0\}$ は連結ではないことを示せ.

$\boxed{\mathrm{C}}$

$C([0,1])$ を閉区間 $[0,1]$ 上で連続な実数値関数の全体とし，各 $f \in C([0,1])$ に対して

$$\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

と定義する．また，関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を漸化式

$$f_0(x) = x, \quad f_{n+1}(x) = x + \frac{1}{2}\sin\bigl(f_n(x)\bigr) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

によって定義する．

(1) $\|\cdot\|$ は $C([0,1])$ のノルムであることを示せ．

(2)

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leq \frac{1}{2}\|f_n - f_{n-1}\| \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を示せ．

(3) $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $C([0,1])$ のコーシー列であることを示せ．