埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

平成 31 年 4月入学，平成 30 年秋期入学

試験問題

数　　学

2018 年 8 月 20 日　13:00 〜 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の 4 問はすべてに解答すること.

2．$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$ の中から，1 問を選択し，解答すること.

3．答案用紙 1 枚につき 1 問ずつ，計 5 問を解答すること.

4．答案用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

a は実数とし，$A = \begin{pmatrix} 1+a & a & -2a \\ -a & 1-a & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　A の固有値を求めよ．

(2)　A が対角化可能かどうか判定し，可能なときは対角化せよ．

$\boxed{2}$

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ を考える.

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$$

で与えられる線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ の核と像の基底を求めよ.

$\boxed{3}$

次の問いに答えよ.

(1) n は自然数とする. $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-nx}\,dx$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} xe^{-nx}\,dx$ を示せ.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \int_0^{\infty}\frac{x}{e^x - 1}\,dx$ を示せ.

$\boxed{4}$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の関数

$$f(x,y) = xy\log\bigl(x^2+y^2\bigr)$$

に対して，次の問いに答えよ．

(1) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ となる (x,y) をすべて求めよ．

(2) f の極大点をすべて求めよ．

$\boxed{\text{A}}$

群 G とその部分群 H に対して，次の問いに答えよ．

(1) G における H の指数 $[\,G:H\,]$ の定義を述べよ．

(2) H が G の正規部分群であることの定義を述べよ．

(3) $[\,G:H\,]=2$ ならば，H は G の正規部分群であることを示せ．

(4) 行列式が 1 の複素 2 次正方行列全体の集合 $SL(2,\mathbb{C})$ は行列の積に関して群をなす．$SL(2,\mathbb{C})$ の部分群

$$B=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})\;\middle|\; a,\,b\in\mathbb{C},\ a\neq 0\right\}$$

は正規部分群ではないことを示せ．ただし，$SL(2,\mathbb{C})$ が群をなすことや，B がその部分群であることは示さなくてよい．

$\boxed{\text{B}}$

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し，x のノルム $\|x\|$ を

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

とする．$\mathbb{R}^2$ の部分集合 A, B を

$$A = [\,0,\,\infty) \times \mathbb{R}, \quad B = (-\infty,\,0) \times \mathbb{R}$$

とする．$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\ell(x, y)$ を

$$\ell(x,y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{（「}x,\, y \in A\text{」または「}x,\, y \in B\text{」のとき）} \\ \|x\| + \|y\| & \text{（「}x \in A,\, y \in B\text{」または「}x \in B,\, y \in A\text{」のとき）} \end{cases}$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1) ℓ は $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数であることを示せ．

(2) 距離空間 $(\mathbb{R}^2, \ell)$ において，A の内部 A^i，A の外部 A^e，A の境界 A^f を求めよ．

$\boxed{\mathrm{C}}$

$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上で対数関数 $\log z$ は次のように定義される．

$$\log z = \log_e|z| + i\arg z \quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}).$$

ここで，$\log_e$ は実関数の対数関数であり，$|z|$, $\arg z$ はそれぞれ z の絶対値と偏角を表す．また，偏角の主値 $-\pi \le \mathrm{Arg}\, z < \pi$ を用いた $\log z$ の主値を $\mathrm{Log}\, z$ と書く．

$$\mathrm{Log}\, z = \log_e|z| + i\mathrm{Arg}\, z.$$

2 変数実数値関数 u, v を $\mathrm{Log}\, z = u + iv \ \ (z = x+iy)$ によって定める．すなわち

$$u(x,y) = \mathrm{Re}(\mathrm{Log}\, z),\ v(x,y) = \mathrm{Im}(\mathrm{Log}\, z) \quad (z = x+iy)$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) $u(x,y)$ と $v(x,y)$ を具体的に x, y を用いて書き下せ．このとき，必要ならば，逆三角関数 $\mathrm{Tan}^{-1}\phi$ を用いよ．$\mathrm{Tan}^{-1}\phi$ は次の関数の逆関数である．

$$\phi = \tan\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

(2) $\mathbb{C}\setminus\{(x,0)\,|\,x \le 0\}$ において，偏導関数 $u_x(x,u)$, $u_y(x,y)$, $v_x(x,y)$, $v_y(x,y)$ を求めよ．

(3) $\mathrm{Log}\, z = u+iv$ に対して $\mathbb{C}\setminus\{(x,0)\,|\,x\le 0\}$ 上で Cauchy-Riemann の関係式を確認し，微分 $(\mathrm{Log}\, z)'$ を求めよ．