Mémoire de M1 : Groupe fondamental et revêtements

Jean-Baptiste Campesato et Agnès Marchand

10 mai 2011

Avant-propos

Le présent travail est un mémoire rédigé dans le cadre d'une formation en première année de master de mathématiques sous la direction de M. Ingo Waschkies.
Dans le cadre de ce mémoire nous avons eu à travailler sur la théorie des catégories, sur la notion d'homotopie (et du groupoïde Π_1) ainsi que sur la notion de fibré. [4][1][2][3]
Dans un souci de concision, nous admettrons certains résultats relatifs à ces notions.
Nous nous sommes inspirés de plusieurs ouvrages concernant le sujet, ce qui nous a permis d'explorer plusieurs points de vue.

Table des matières

1 Introduction

La finalité de ce mémoire est de démontrer l'équivalence entre la catégorie $\mathcal{R}ev(X)$ des revêtements d'un espace topologique X localement semi-1-connexe et la catégorie $\mathcal{R}ep(\Pi_1(X), \mathcal{E}ns)$ des représentations du groupoïde fondamental de X. L'intérêt de travailler avec le groupoïde fondamental et la théorie des catégories est que nous n'avons pas à nous fixer de point de base.
Pour cela nous présenterons brièvement une construction du groupoïde fondamental : il s'agit de la catégorie dont les objets sont les éléments de X et dont les morphismes de $x_0 \in X$ à $x_1 \in X$ sont les chemins d'origine x_0 et d'arrivée x_1 à homotopie près.
Nous verrons alors ce que sont les revêtements : on peut visualiser un revêtement comme une pile de feuilles au-dessus d'un espace topologique X, dit de base. Nous utiliserons ensuite la notion de relèvement qui permet de relever un chemin de l'espace de base dans les feuilles afin d'associer à un revêtement $p : Y \to X$ une représentation, dite de monodromie, $\mu_p : \Pi_1(X) \to \mathcal{E}ns$.
Il s'en suivra que nous avons ainsi construit un foncteur $\mu : \mathcal{R}ev(X) \to \mathcal{R}ep(\Pi_1(X), \mathcal{E}ns)$.
Nous prouverons ensuite que pour un espace de base X localement semi-1-connexe, ce foncteur est une équivalence de catégories.
Donc, sous ces conditions, la catégorie des revêtements de X est essentiellement la même que la catégorie des représentations du groupoïde fondamental de X.

2 Le groupoïde fondamental

Dans un souci d'efficacité et de concision, nous admettons les résultats relatifs au groupoïde fondamental. Nous donnons ci-dessous une esquisse de construction du groupoïde fondamental d'un espace topologique X afin d'en fixer les notations pour la suite de l'exposé.

- Un *chemin* de X est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$. L'origine $x_0 = \gamma(0)$ et l'arrivée $x_1 = \gamma(1)$ sont les extrémités du chemin γ. Nous noterons $\gamma : x_0 \rightsquigarrow x_1$ un chemin d'origine x_0 et d'arrivée x_1. Si $x_0 = x_1$, on dit que γ est un *lacet* de X.
- Si $\gamma : x_0 \rightsquigarrow x_1$, $\delta : x_1 \rightsquigarrow x_2$, on note
$$\gamma \perp \delta : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \delta(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{array}$$
la concaténation de γ et de δ, d'origine x_0 et d'arrivée x_2.
- On utilise la notation $\gamma \sim \gamma'$ pour signaler que les chemins γ et γ' sont homotopes, c'est-à-dire qu'il existe une application continue $h : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que
  - $\forall s \in [0,1],\ h(s,0) = \gamma(s)$ et $h(s,1) = \gamma'(s)$
  - $\forall t \in [0,1],\ h(0,t) = x_0$ et $h(1,t) = x_1$.
- La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins de x_0 à x_1, noté $\Omega(X, x_0, x_1)$. En quotientant par cette relation d'équivalence on définit le $\pi_1(X, x_0, x_1)$ (ou $\pi_1(X, x_0)$ si $x_0 = x_1$). On note $[\gamma]$ la classe d'homotopie de γ.
- Soit un chemin $\gamma : x_0 \rightsquigarrow x_1$, on note $\gamma_{\text{inv}} : t \mapsto \gamma(1-t)$ son chemin inverse de x_1 vers x_0. Si $\gamma \sim \delta$ alors $\gamma_{\text{inv}} \sim \delta_{\text{inv}}$, on note donc $[\gamma]^{-1} = [\gamma_{\text{inv}}]$.
- On note $c_x : t \mapsto x$ le chemin constant en x.
- Si $\gamma \sim \gamma'$ et $\delta \sim \delta'$, on a $\gamma \perp \delta \sim \gamma' \perp \delta'$. On utilise donc la notation $[\gamma][\delta] = [\gamma \perp \delta]$.
- On définit le *groupoïde fondamental* $\Pi_1(X)$ dont les objets sont les éléments de X et dont pour tout couple de points $(x_0, x_1) \in X^2$, les morphismes sont donnés par $\mathrm{Hom}_{\Pi_1(X)}(x_0, x_1) = \pi_1(X, x_0, x_1)$. La loi de composition est donnée par la concaténation de classes d'homotopie : $[\delta] \circ [\gamma] = [\gamma][\delta] = [\gamma \perp \delta]$.
- L'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ est un groupe pour la concaténation $[\delta][\gamma]$ de classes d'homotopie, il est appelé *groupe fondamental de X en x_0*.
- Un chemin $\gamma : x_0 \rightsquigarrow x_1$ définit un isomorphisme de groupes :
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_1) \\ [\delta] & \longmapsto & [\gamma]^{-1}[\delta][\gamma] \end{array}.$$
Ainsi si X est connexe par arcs, on parle du groupe fondamental de X.
- Un espace X est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs et si le groupe $\pi_1(X, x)$ est trivial, ce qui revient à dire que deux chemins de mêmes extrémités sont toujours homotopes.
- Si X est connexe par arcs, $\underline{\pi_1(X, x_0)} \to \Pi_1(X)$ est une équivalence de catégories.

Sachant qu'un groupe est un groupoïde à un seul objet dont les morphismes sont les éléments du groupe, on note $\underline{G}$ le groupoïde associé au groupe G.

- Pour toute application continue $f : X \to Y$ on définit le foncteur :

$$\Pi_1(f) : \begin{cases} \Pi_1(X) & \longrightarrow & \Pi_1(Y) \\ x & \longmapsto & f(x) \\ [\gamma] & \longmapsto & [f \circ \gamma] \end{cases}$$

(en effet $f \circ (\gamma \perp \delta) = f \circ \gamma \perp f \circ \delta$). Puis on vérifie facilement que l'on a $\Pi_1(Id_X) = Id_{\Pi_1(X)}$ et $\Pi_1(g \circ f) = \Pi_1(g) \circ \Pi_1(f)$, ainsi le groupoïde fondamental est fonctoriel et nous avons le foncteur $\Pi_1 : \mathcal{T}op \to \mathcal{G}r$ (où $\mathcal{T}op$ est la catégorie des espaces topologiques et $\mathcal{G}r$ est la catégorie des (petits) groupoïdes).
- Soient $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ deux fonctions continues. On note $f \sim_A g$ si f et g sont *homotopes relativement à une partie A de X*, c'est-à-dire qu'il existe une application continue $h : X \times [0,1] \to Y$ telle que $\forall x \in X,\ h(x,0) = f(x),\ h(x,1) = g(x)$ et $\forall t \in [0,1], \forall a \in A,\ h(a,t) = f(a) = g(a)$. Il est clair qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Si $A = \varnothing$ on dit simplement que f et g sont homotopes et on note $f \sim g$.
- Une homotopie $h : f \rightsquigarrow g$ définit un isomorphisme de foncteurs $\Pi_1(f) \to \Pi_1(g)$.
- Une application $f : X \to Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application continue $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \sim Id_X$ et $f \circ g \sim Id_Y$.
- Si f est une équivalence d'homotopie, alors $\Pi_1(f)$ est une *équivalence de catégories*. En effet, soit $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \sim Id_X$ et $f \circ g \sim Id_Y$. Soient $h : g \circ f \rightsquigarrow Id_X$ et $k : f \circ g \rightsquigarrow Id_Y$ les homotopies associées. On obtient alors les isomorphismes $\Pi_1(h) : \Pi_1(g) \circ \Pi_1(f) \to \Pi_1(Id_X) = Id_{\Pi_1(X)}$ et $\Pi_1(k) : \Pi_1(f) \circ \Pi_1(g) \to \Pi_1(Id_Y) = Id_{\Pi_1(Y)}$.

3 Revêtements

3.1 Fibrés

Définition 3.1 : fibré

Soit X un espace topologique.
• Un fibré sur X est la donnée d'une application continue $p : Y \to X$ telle que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x, un espace topologique F et un homéomorphisme $\varphi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\simeq} U \times F$ tels que $p_U \circ \varphi = p$ où $p_U : U \times F \to U$ est la projection usuelle.
Ce qui peut se représenter par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi", "\simeq"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "p_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Remarques :
- Pour tout $x \in X$, $p^{-1}(x)$ est la *fibre* de Y au-dessus de x.
- X est la *base* du fibré, Y est l'*espace total*, p est la *projection* de Y sur X, U est un voisinage ouvert *trivialisant*, φ est une *trivialisation locale* de p sur U.
- Un fibré est dit *trivial* si X est un ouvert trivialisant. Ce qui revient à dire qu'il existe un homémorphisme $\Phi : Y \to X \times F$ tel que $p_X \circ \Phi = p$, *i.e.* Φ est une trivialisation globale.
- On appelle *section (continue)* de p (ou de Y), au-dessus de X, toute application continue $s : X \to Y$ telle que $p \circ s = Id_X$. De la même façon, on appelle *section (continue)* de p (ou de Y), au-dessus de $X' \subset X$, toute section de $p_{|p^{-1}(X')}$. Une *section locale* en $x \in X$ est une section définie sur un voisinage de x. Une section est injective.
- La trivialisation φ n'est généralement pas unique.
- Soit U un ouvert trivialisant alors, $p^{-1}(x) = (p_U \circ \varphi)^{-1}(x) = \varphi^{-1} \circ p_U^{-1}(x) = \varphi^{-1}(x \times F) \simeq \{x\} \times F \simeq F$, ainsi toutes les fibres $p^{-1}(x)$, $x \in U$, au-dessus de U sont homéomorphes.

Définition 3.2 : morphisme de fibrés

Soient $p_1 : Y_1 \to X$ et $p_2 : Y_2 \to X$ deux fibrés. Un *morphisme de fibrés* est une application continue $f : Y_1 \to Y_2$ telle que $p_2 \circ f = p_1$. Ce qui peut se représenter par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

3.2 Définitions et premières propositions

Définition 3.3 : revêtement

Soit X un espace topologique.
Un revêtement de X est un fibré à fibres discrètes sur X.

Caractérisations 3.4

Soit X un espace topologique.
1) Un revêtement de X est la donnée d'une application continue $p : Y \to X$ telle que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x, un espace topologique discret F non-vide et un homéomorphisme $\varphi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\simeq} U \times F$ tels que $p_U \circ \varphi = p$ où $p_U : U \times F \to U$ est la projection usuelle.

2) Un revêtement de X est la donnée d'un homéomorphisme local $p : Y \to X$ tel que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x, un espace topologique F non-vide et un homéomorphisme $\varphi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\simeq} U \times F$ tels que $p_U \circ \varphi = p$ où $p_U : U \times F \to U$ est la projection usuelle.

On peut encore voir un revêtement comme une « pile de feuilles » au-dessus du voisinage d'un point :
3) Un revêtement de X est la donnée d'une application continue $p : Y \to X$ telle que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x tel que $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ soit une union disjointe non-vide d'ouverts V_i de Y tels que les $p_{|V_i} : V_i \to U$ soient des homéomorphismes.

<u>Démonstration :</u>

<u>$1 \Rightarrow 3$:</u> Soit $p : Y \to X$ un revêtement de X au sens du premier point.
Soient $x \in X$, U un voisinage ouvert trivialisant de x et $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ une trivialisation de p sur U.
Pour tout $i \in F$, posons $V_i = \varphi^{-1}(U \times \{i\})$. V_i est un ouvert de $p^{-1}(U)$ comme image réciproque d'un ouvert (F est muni de la topologie discrète) par une application continue, et $p^{-1}(U)$ étant un ouvert, V_i est un ouvert de Y.
Puis $p^{-1}(U) = \varphi^{-1}(U \times F) = \varphi^{-1}\left(\bigsqcup_{i \in F} U \times i\right) = \bigsqcup_{i \in F} V_i$.
Et enfin $p_U \circ \varphi = p \Rightarrow p_{|V_i} = p_U \circ \varphi_{|V_i} : V_i \underset{\simeq}{\overset{\varphi}{\to}} U \times \{i\} \underset{\simeq}{\overset{p_U}{\to}} U$.

<u>$3 \Rightarrow 1$:</u> Soit $p : Y \to X$ un revêtement de X au sens du troisième point.

Soient $x \in X$, U un voisinage ouvert trivialisant de x et un recouvrement de $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ par des ouverts V_i de Y deux à deux disjoints tels que $p_{|V_i} : V_i \to U$ soient des homéomorphismes.
On munit I de la topologie discrète. Posons : $\varphi : p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i \to U \times I$, $\varphi(x) = (p(x), i)$ pour $x \in V_i$.
On vérifie aisément que φ est une trivialisation locale de p sur U.

<u>$1, 3 \Rightarrow 2$:</u> Soit $p : Y \to X$ un revêtement de X au sens du premier et troisième point (qui sont équivalents).
Soient $y \in Y$, U un voisinage trivialisant de $x = p(y)$ et un recouvrement de $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ par des ouverts V_i de Y deux à deux disjoints tels que $p_{|V_i} : V_i \to U$ soient des homéomorphismes.
Donc p est un homéomorphisme local.
Et d'après le premier point, pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x, un espace topologique F non-vide et un homéomorphisme $\varphi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\simeq} U \times F$ tels que $p_U \circ \varphi = p$.

<u>$2 \Rightarrow 1$:</u> Soit $p : Y \to X$ un revêtement de X au sens du deuxième point.
Soient $U \subset X$ un ouvert trivialisant et $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ une trivialisation de p sur U.
Soient $y \in p^{-1}(U)$ et W un voisinage ouvert de y tel que $p_{|W}$ soit un homéomorphisme (p est un homéomorphisme local) et $(x, z) = \varphi(y) \in U \times F$.
$\varphi(W)$ est un voisinage ouvert de (x, z) comme image d'un ouvert par un homéomorphisme. Donc il existe deux ouverts $U_x \subset U$ et $V_z \subset F$ tels que $U_x \times V_z \subset \varphi(W)$.
Comme $p \circ \varphi^{-1} = p_U$, la projection $p_{U_x} : U_x \times V_z \to U_x$ est un homémorphisme, donc une bijection, ainsi $V_z = \{z\}$ et donc $\{z\}$ est un ouvert de F.

■

Remarques :

- Les remarques de la définition d'un fibré s'adaptent à celle d'un revêtement.
- Un homéomorphisme local est une application ouverte et continue. Ainsi toute section s au-dessus d'une partie X' de X est aussi ouverte, et est donc un homéomorphisme de X' sur $s(X')$ (car bijective, continue, ouverte). De plus, si deux sections coïncident en un point, elles coïncident sur un voisinage de ce point (localement l'inverse de p). De même si deux sections au-dessus d'une partie connexe coïncident en un point, elles sont égales.
- Soit F un espace discret. Alors la projection $p_X : X \times F \to X$ est un revêtement trivial de X.
- Soient $p : Y \to X$ un revêtement et A un sous-espace de X, alors $p_{|p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ est un revêtement de A : le *revêtement induit au-dessus de A*.
- Soit U un ouvert trivialisant alors, $p^{-1}(x) = (p_U \circ \varphi)^{-1}(x) = \varphi^{-1} \circ p_U^{-1}(x) = \varphi^{-1}(\{x\} \times F) \simeq \{x\} \times F \simeq F \neq \varnothing$ (on a imposé F non vide) donc p est surjectif et toutes les fibres $p^{-1}(x)$, $x \in U$, au-dessus de U sont homéomorphes.

Dans le cas où X est connexe, la dernière remarque se généralise à toutes les fibres au-dessus de X (même si le revêtement n'est pas trivial !).

Proposition 3.5

Soit $p : Y \to X$ un revêtement. Si X est connexe alors toutes les fibres $p^{-1}(x)$, $x \in X$ sont homéomorphes.
Si le cardinal des fibres est un entier fini m, on dit que Y est un revêtement à m feuilles de X.

L'interêt du pullback en topologie algébrique est de construire à partir d'un espace fibré, un autre espace de mêmes fibres, le fibré induit, en remontant le long d'une application entre les deux bases, d'où l'appellation.

Démonstration :

Soit $x_0 \in X$, considérons $W = \{x \in X,\, p^{-1}(x) \simeq p^{-1}(x_0)\}$. Soit $x \in W$, alors il existe un voisinage ouvert trivialisant U de x, et d'après la dernière remarque, toutes les fibres au-dessus de U sont homéomorphes, donc $U \subset W$.
Soit $x \notin W$, alors il existe un voisinage ouvert trivialisant U de x, et de la même façon $U \subset X \setminus W$, donc $X \setminus W$ est un ouvert, et donc W est un fermé.
W est un ouvert et un fermé de X connexe contenant x_0, donc $W = X$.

■

Définition-Proposition 3.6 : *pullback*

Soient $p : Y \to X$ un revêtement et $f : Z \to X$ une application continue.
L'espace topologique $f^*Y = Z \underset{X}{\times} Y = \{(z, y) \in Z \times Y,\, f(z) = p(y)\}$ est appelé *produit fibré de Y et de Z au-dessus de X*.
Muni de la première projection, il forme un revêtement de Z que l'on note f^*p et que l'on nomme *pullback de p*.
La fibre de Z au-dessus d'un point $z \in Z$ s'identifie à la fibre de X au-dessus du point $f(z)$: $f^*p^{-1}(z) = p^{-1}(f(z))$.

$$\begin{tikzcd} f^*Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "f^*p"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Démonstration :

Soient U un ouvert trivialisant et $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ une trivialisation de p sur U. Alors $\psi : \begin{array}{ccc} f^*p^{-1}(f^{-1}(U)) & \longrightarrow & f^{-1}(U) \times F \\ (z, y) & \longmapsto & (z, p_F(\varphi(y))) \end{array}$ est une trivialisation de f^*p sur $f^{-1}(U)$ d'inverse $(z, \lambda) \mapsto (z, \varphi^{-1}(f(z), \lambda))$.

■

Remarques :

- Le pullback d'un revêtement trivial est trivial.
- La restriction est un cas particulier du pullback où l'on considère l'application inclusion.
- En particulier la restriction du revêtement trivial est triviale.

Définition 3.7 : morphisme de revêtements

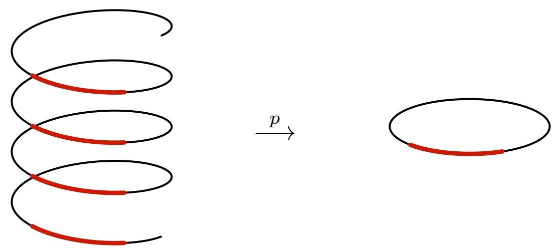
Un morphisme de revêtements est un morphisme au sens de fibrés (3.2).

Remarques : soit $f : Y \to Y'$ un morphisme de revêtements.

- Il est évident que f est un isomorphisme de revêtements si et seulement si f est un homéomorphisme.
- Tout revêtement trivial est isomorphe au revêtement $X \times F \to X$ où F est obtenu par la trivialisation.

Ainsi, étant donné un espace topologique X, on définit la catégorie $\mathcal{R}ev(X)$ des revêtements de X.

3.3 Exemple : un revêtement du cercle



Montrons que $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ est un revêtement du cercle.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $I_\alpha = \left]\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2}\right[$ et $U_\alpha = \left\{e^{it},\, t \in I_\alpha\right\}$.
On sait que p restreint à un intervalle de longueur strictement inférieure à 2π est un homéomorphisme.
On a $p^{-1}(U_\alpha) = \displaystyle\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \left]\alpha - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right[$.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"] \arrow[dr] & I_\alpha \times \mathbb{Z} \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"] \arrow[d] & U_\alpha \times \mathbb{Z} \arrow[dl] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

Remarquons que ce revêtement n'est pas trivial : dans le cas contraire il existerait un homéomorphisme f tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "f", "\simeq"'] \arrow[dr] & & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z} \arrow[dl] \\ & \mathbb{S}^1 & \end{tikzcd}$$

ce qui n'est pas possible car $\mathbb{R}$ est connexe ce qui n'est pas le cas de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}$.

3.4 Construction des revêtements par recollement

Le théorème de recollement des fibrés se généralise aux revêtements :

Théorème 3.8

Soit $X = \cup_{i\in I} U_i$ un espace topologique admettant un recouvrement par des ouverts U_i.
Soit pour tout $i \in I$, $p_i : Y_i \to U_i$ un revêtement de U_i.
Soit pour tout $(i,j) \in I^2$, $\varphi_{ij} : Y_{j|U_{ij}} \to Y_{i|U_{ij}}$ un isomorphisme de revêtements sur U_{ij} (i.e. $p_{i|U_{ij}} \circ \varphi_{ij} = p_{j|U_{ij}}$) tel que l'on ait :

1. $\varphi_{ii} = id_{Y_i}$
2. $\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik}$ sur U_{ijk} (i.e. $\varphi_{ij|p_j^{-1}(U_{ijk})} \circ \varphi_{jk|p_k^{-1}(U_{ijk})} = \varphi_{ik|p_k^{-1}(U_{ijk})}$)

Alors il existe un revêtement $p : Y \to X$ et des isomorphismes de revêtements $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \to Y_i$ (i.e. $p_i \circ \varphi_i = p$).
De plus s'il existe un autre revêtement $p' : Y' \to X$ ayant des isomorphismes de revêtements $\varphi'_i : p'^{-1}(U_i) \to Y_i$ alors il existe un unique isomorphisme de revêtements $\alpha : Y \to Y'$ tel que $\varphi'_i \circ \alpha = \varphi_i$.

On pose $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$. On utilise les notations $p_{i|U_{ij}} = p_{i|p_i^{-1}(U_{ij})}$ et $Y_{i|U_{ij}} = p_i^{-1}(U_{ij})$.

On déduit de 1 et 2 que $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$.

Esquisse de preuve / Construction du revêtement par recollement :

Posons $\tilde{Y} = \sqcup_{i\in I} Y_i$.
On considère l'application continue $\tilde{p} : \begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \longrightarrow & X \\ y_i \in Y_i & \longmapsto & p_i(y_i) \end{array}$.
Pour $y_i \in Y_i \subset \tilde{Y}$ et $y_j \in Y_j \subset \tilde{Y}$ on définit la relation d'équivalence $y_i \sim y_j \Leftrightarrow (y_i, y_j \in \tilde{p}^{-1}(U_{ij})$ et $\varphi_{ij}(y_j) = y_i)$. On définit ainsi $Y = \tilde{Y}/\sim$.

Si $y_i \sim y_j$, alors $\tilde{p}(y_i) = p_i(y_i) = p_i(\varphi_{ij}(y_j)) = p_j(y_j)$, donc $\tilde{p}$ induit une application continue $p : \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \overline{y_i} & \longmapsto & p_i(y_i) \end{array}$.
Considérons les applications continues ouvertes $\sigma_i : Y_i \hookrightarrow \tilde{Y} \to Y$, alors pour tout $i \in I$ $p \circ \sigma_i = p_i$ i.e. σ_i est un morphisme de revêtements sur U_i.
Soient $y_{i_1}, y_{i_2} \in Y_i$ tels que $\sigma_i(y_{i_1}) = \sigma_i(y_{i_2})$ alors $y_{i_1} = \varphi_{ii}(y_{i_2}) = y_{i_2}$, donc σ_i est injective.
Soit $\overline{y} \in p^{-1}(U_i)$, $\exists j \in I$, $y \in Y_j$. Alors $y \in p_j^{-1}(U_{ij})$ et en posant $y_i = \varphi_{ij}(y)$ nous obtenons que $\overline{y} = \overline{y_i} = \sigma_i(y_i)$. Ainsi $\sigma_i : Y_i \to p^{-1}(U_i)$ est bijective et ouverte, c'est donc un homéomorphisme i.e. un isomorphisme de revêtements sur U_i. En posant $\varphi_i = \sigma_i^{-1}$, nous avons obtenu la construction du revêtement par recollement, i.e. la première partie du théorème.

■

3.5 Relèvement des applications

Définition 3.9 : relèvement

Soient $p : Y \to X$ un revêtement, $f : Z \to X$ une application continue.
Un *relèvement de* f *à* Y est une application continue $\tilde{f} : Z \to Y$ telle que $f = p \circ \tilde{f}$.

Si on se donne en plus des éléments $z_0 \in Z$, $x_0 = f(z_0) \in X$ et $y_0 \in p^{-1}(x_0) \in Y$ et la condition que $\tilde{f}(z_0) = y_0$, on parle de *relèvement d'origine* y_0.

Ce qui peut se représenter par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\ (Z, z_0) \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

On remarque qu'une section de p est un relèvement de l'identité $id_X : X \to X$.

Dans le cas où Z est connexe, on va voir que deux relèvements qui coïncident en un point sont égaux :

Proposition 3.10 : unicité du relèvement

Lorsque Z est connexe, si f admet un relèvement d'origine y_0, alors il est unique.

<u>Démonstration :</u>

Soient $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ deux relèvements de f d'origine y_0.
Posons $W = \{z \in Z,\ \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\}$.
Soient $z \in Z$, U un voisinage ouvert trivialisant de $f(z)$, $h : p^{-1}(U) \to U \times F$ une trivialisation de p au-dessus de U et, pour tout $n \in F$, $V_n = h^{-1}(U \times \{n\})$. Comme $f = p \circ \tilde{f}_i$, $\tilde{f}_i(z) \in p^{-1}(f(z)) \subset p^{-1}(U) = \bigsqcup_{n \in F} V_n$.
• Si $z \in W$, soit $n \in F$ tel que $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \in V_n$. Alors $\tilde{f}_1^{-1}(V_n) \cap \tilde{f}_2^{-1}(V_n)$ est un voisinage ouvert de z contenu dans W, donc W est un ouvert.
• Si $z \in Z \setminus W$, soient $n_1, n_2 \in F$ tels que $\tilde{f}_1(z) \in V_{n_1}$ et $\tilde{f}_2(z) \in V_{n_2}$. Alors $n_1 \neq n_2$ et $\tilde{f}_1^{-1}(V_{n_1}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(V_{n_2})$ est un voisinage ouvert de z contenu dans $Z \setminus W$, il s'agit donc d'un ouvert, et W est donc un fermé.
Comme $y_0 \in W$, par connexité de Z, $W = Z$.

■

Nous allons maintenant nous intéresser à l'existence de relèvements dans le cadre qui nous intéresse : les relèvements de chemins homotopes.
On va montrer qu'étant donnés un revêtement $p : Y \to X$ et un chemin γ dans X d'origine x, alors pour tout $y \in p^{-1}(x)$, il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma_y}$ de γ d'origine y. Et plus généralement nous verrons que si l'on se donne deux chemins γ et δ homotopes, alors leurs relèvements $\tilde{\gamma_y}$ et $\tilde{\delta_y}$ d'origine $y \in p^{-1}(\gamma(0))$ sont homotopes.
Pour cela nous allons avoir besoin de plusieurs lemmes.

Lemme 3.11

Soient X un espace topologique connexe, F_1, F_2 deux espaces discrets et $h = X \times F_1 \to X \times F_2$ un morphisme de revêtements triviaux.

$$\begin{tikzcd} X \times F_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & X \times F_2 \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Alors $h = (id_X, g)$ où $g : F_1 \to F_2$.

Démonstration :

Soit $\lambda \in F_1$, alors $h(X \times \{\lambda\})$ est un sous-espace connexe de $X \times F_2$, donc il existe un certain $\mu \in F_2$ tel que $h(X \times \{\lambda\}) \subset X \times \{\mu\}$.
On construit ainsi une application $g : F_1 \to F_2$ vérifiant $h = (id_X, g)$.

■

En particulier si l'on a que X est connexe et que $p : Y \to X$ est un revêtement trivial de X, alors si l'on se donne $\varphi_1 : Y \to X \times F_1$ et $\varphi_2 : Y \to X \times F_2$ deux trivialisations de X, en appliquant le lemme précédent à $h = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$, il vient $h = (id_X, g)$. L'application h étant un homéomorphisme, on en déduit que g est bijective. Puis comme $\varphi_2 = h \circ \varphi_1$, $\varphi_2(y) = (p(y), g \circ p_{F_1} \circ \varphi_1(y))$.

Lemme 3.12 : nombre de Lebesgue d'un recouvrement

Soit (X, d) un espace métrique compact et soit $(U_j)_{j \in J}$ un recouvrement de X par des ouverts. Il existe alors un réel $\lambda > 0$ tel que $\forall x \in X$, $\exists j_0 \in J$, $B(x, \lambda) \subset U_{j_0}$.
(Tout sous-espace de X de diamètre inférieur à λ est contenu dans l'un des ouverts U_j.)

Démonstration :

Supposons par l'absurde que le résultat soit faux. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in X$ tel que $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$ ne soit contenue dans aucun ouvert U_j. X étant compact, on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergente vers un $x \in X$. Soit j_0 tel que $x \in U_{j_0}$, alors U_{j_0} est un voisinage ouvert de x. Par convergence de la suite, pour tout $\varepsilon > 0$, $x_{\varphi(n)} \in B(x, \varepsilon)$ à partir d'un certain rang. Comme U_{j_0} est un ouvert, on peut choisir ε suffisamment petit pour que $B(x, \varepsilon) \subset U_{j_0}$. Ainsi pour n assez grand on obtient : $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subset B(x, \varepsilon) \subset U_{j_0}$.
D'où une contradiction.

■

Lemme 3.13

Tout revêtement du segment $I = [0, 1]$ est trivial.

<u>Démonstration :</u>

D'après le lemme 3.12 il existe un entier $n > 0$ tel que les segments $S_i = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ soient inclus dans des ouverts trivialisants, et soient donc eux-mêmes trivialisants ($i \in [\![0, n-1]\!]$). Pour tout i, soit $\varphi_i : p^{-1}(S_i) \to S_i \times F_i$ une trivialisation de S_i.
Un singleton étant connexe, d'après le lemme 3.11 il existe une bijection $g : F_1 \to F_0$ telle que $\forall y \in p^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$, $\varphi_0(y) = (p(y), g \circ p_{F_1} \circ \varphi_1(y))$ où $p_{F_1} : S_1 \times F_1 \to F_1$ est le projecteur canonique.
Posons : $\psi_1(y) = \begin{cases} \varphi_0(y) \text{ si } y \in S_0 \\ (p(y),\, g \circ p_{F_1} \circ \varphi_1(y)) \text{ si } y \in S_1 \end{cases}$.
Alors ψ_1 est une trivialisation de p au-dessus de $S_0 \cup S_1$, et de proche en proche, on obtient une trivialisation de p au-dessus de I.

■

Lemme 3.14

Tout revêtement du carré $I \times I$ est trivial.

<u>Démonstration :</u>

De même, il existe un entier $n > 0$ tel que les carrés $S_{i,j} = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ soient inclus dans des ouverts trivialisants, et soient donc eux-mêmes trivialisants ($i, j \in [\![0, n-1]\!]$). Pour tout i, j, soit $\varphi_{i,j} : p^{-1}(S_{i,j}) \to S_{i,j} \times F_{i,j}$ une trivialisation de $S_{i,j}$.
Comme $S_{0,0} \cap S_{1,0}$ est connexe, d'après le lemme 3.11, il existe une bijection $g : F_{1,0} \to F_{0,0}$ telle que $\forall y \in p^{-1}(S_{0,0} \cap S_{1,0})$, $\varphi_{0,0}(y) = (p(y), g \circ p_{F_{1,0}} \circ \varphi_{1,0}(y))$.
On peut donc construire comme précédemment, une trivialisation de p au-dessus de $S_{0,0} \cup S_{1,0}$, puis de proche en proche au-dessus de I^2.

■

Théorème 3.15 : relèvement des chemins

Soit $p : Y \to X$ un revêtement. Pour tout chemin γ dans X d'origine x, pour tout y dans $p^{-1}(x)$, il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma_y}$ de γ d'origine y.

<u>Démonstration :</u>

Soit $\gamma : I = [0,1] \to X$, un chemin dans X d'origine $x = \gamma(0)$ et soit $y \in p^{-1}(x)$. On a vu en 3.6 que $\gamma^* p$ était un revêtement de I, il est donc trivial. Il existe donc un espace discret F et un homéomorphisme $\varphi : \gamma^* Y \to I \times F$ tel que $p_I \circ \varphi = \gamma^* p$. On obtient donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
I \times F \arrow[dr, "p_I"'] & \gamma^* Y \arrow[l, "\varphi", "\simeq"'] \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "\gamma^* p"] & Y \arrow[d, "p"] \\
& I \arrow[r, "\gamma"'] & X
\end{tikzcd}$$

Soit $(0, f) = \varphi(0, y)$, considérons l'application $s : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & I \times F \\ i & \longmapsto & (i, f) \end{array}$ (l'inverse de p_I pour $f \in F$ fixé). Alors $\tilde{\gamma_y} = p_Y \circ \varphi^{-1} \circ s$ est un relèvement de γ et $\tilde{\gamma_y}(0) = y$.
L'unicité découle de la connexité de I (3.10).

■

Corollaire 3.16 : relèvement des chemins constants

Soit $p : Y \to X$ un revêtement. Pour tout chemin constant $\gamma(t) = x$ dans X, pour tout y dans $p^{-1}(x)$, le chemin constant $\tilde{\gamma_y}(t) = y$ est l'unique relèvement de γ d'origine y.

Théorème 3.17 : relèvement des homotopies

Soient $p : Y \to X$ un revêtement, γ et δ deux chemins homotopes. Si $\tilde{\gamma_y}$ et $\tilde{\delta_y}$ sont deux relèvements de γ et δ respectivement ayant même origine y, alors $\tilde{\gamma_y}$ et $\tilde{\delta_y}$ ont mêmes extrémités et sont homotopes.

Nous allons réaliser une démonstration similaire à la précédente.
Démonstration :

Soient $\gamma, \delta : I = [0,1] \to X$ deux chemins homotopes dans X. Soit $h : I \times I \to X$ une homotopie entre γ et δ telle que : $h(t,0) = \gamma(t)$, $h(t,1) = \delta(t)$, $h(0,s) = \gamma(0) = \delta(0) = x$ et $h(1,s) = \gamma(1) = \delta(1)$.
Soit $y \in p^{-1}(x)$. On a vu que h^*p était un revêtement de $I \times I$, il est donc trivial. Il existe donc un espace discret F et un homéomorphisme $\varphi : h^*Y \to I \times I \times F$ tel que $p_{I^2} \circ \varphi = h^*p$. On obtient donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
I \times I \times F \arrow[dr, "p_{I^2}"'] & h^*Y \arrow[l, "\varphi", "\simeq"'] \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "h^*p"] & Y \arrow[d, "p"] \\
& I \times I \arrow[r, "h"'] & X
\end{tikzcd}$$

Soit $(0,0,f) = \varphi(0,0,y)$, considérons l'application $s : \begin{array}{ccc} I \times I & \longrightarrow & I \times I \times F \\ (t,s) & \longmapsto & (t,s,f) \end{array}$.
Alors $\tilde{h_y} = p_Y \circ \varphi^{-1} \circ s$ est un relèvement de h et $\tilde{h_y}(0,0) = y$.
La connexité de I^2 entraîne l'unicité de $\tilde{h_y}$.
Puis $\tilde{h_y}(\cdot, 0)$ est un relèvement de γ d'origine y, par unicité on obtient : $\tilde{h_y}(\cdot,0) = \tilde{\gamma_y}$.
De même $\tilde{h_y}(\cdot,1) = \tilde{\delta_y}$.
On a en de plus que $\tilde{h_y}(0,\cdot) = y$ et comme un chemin constant se relève en un chemin constant, $\tilde{h_y}(1,\cdot)$ est un chemin constant.
$\tilde{\gamma_y}$ et $\tilde{\delta_y}$ sont donc homotopes de mêmes extrémités.

■

Soient $f : X \to Y$ une application continue et $x \in X$, on note alors $f_* : \begin{array}{ccc} \pi_1(X,x) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(x)) \\ [\gamma] & \longmapsto & [f \circ \gamma] \end{array}$.

Théorème 3.18 : théorème du relèvement

Soient $p : Y \to X$ un revêtement, Z un espace connexe et localement connexe par arcs et $f : Z \to X$ une application continue.
Soient $z_0 \in Z$, $x_0 = f(z_0)$ et $y_0 \in p^{-1}(x_0)$.
Il existe un relèvement $\tilde{f} : Z \to Y$ de f d'origine y_0 si et seulement si $f_*(\pi_1(Z,z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y,y_0))$.
Dans ce cas $\tilde{f}$ est unique.

Démonstration

Si un tel relèvement existe, alors $f = p \circ \tilde{f}$, d'où le résultat.
Réciproquement, supposons que $f_*(\pi_1(Z,z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y,y_0))$.
Soit $z \in Z$, soit $\gamma : z_0 \rightsquigarrow z$ un chemin de Z (comme Z est connexe et localement connexe par arcs, Z est connexe par arcs). Alors $f \circ \gamma : x_0 \rightsquigarrow f(z)$ est un chemin de X. Notons $\widetilde{(f \circ \gamma)}_{y_0}$ le relèvement de $f \circ \gamma$ d'origine y_0 et posons $\tilde{f}(z) = \widetilde{(f \circ \gamma)}_{y_0}(1)$.
Montrons que $\tilde{f}(z)$ ne dépend pas du choix de γ : soit $\delta : z_0 \to z$ un autre chemin de Z, et notons $\widetilde{(f \circ \delta)}_{y_0}$ son relèvement d'origine y_0. Alors $[f \circ \gamma \perp (f \circ \delta)_{\text{inv}}] = [f \circ (\gamma \perp \delta_{\text{inv}})] \in f_*(\pi_1(Z,z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y,y_0))$.
Il existe donc un lacet $\lambda : y_0 \rightsquigarrow y_0$ de Y tel que $[p \circ \lambda] = [f \circ \gamma \perp (f \circ \delta)_{\text{inv}}]$.
Par relèvement des homotopies et unicité du relèvement d'un chemin pour une origine donnée, on en déduit que $\widetilde{(f \circ \gamma)}_{y_0}$ et $\widetilde{(f \circ \delta)}_{y_0}$ sont homotopes et ont même extrémités. Donc $\tilde{f}(z)$ ne dépend du choix de γ.

Il reste à vérifier que $\tilde{f}$ ainsi définie est continue : soit U un voisinage ouvert de $\tilde{f}(z)$ tel que $p(U)$ soit ouvert et que $p_{|U}$ soit un homémorphisme sur son image. Soit $V \subset f^{-1}(p(U))$ un voisinage ouvert connexe par arcs de z. Pour tout w dans V, si $\rho : z \rightsquigarrow w$ est un chemin de V, alors $\tilde{f}(w)$ est l'extrémité du relèvement de $f \circ (\alpha \perp \rho) = f \circ \alpha \perp f \circ \rho$ d'origine y_0 et appartient donc à U. Il s'ensuit que f est continue.
L'unicité découle de la connexité de Z (3.10).

■

Corollaire 3.19

Soient $p : Y \to X$ un revêtement, Z un espace simplement connexe et localement connexe par arcs et $f : Z \to X$ une application continue.
Soient $z_0 \in Z$, $x_0 = f(z_0)$ et $y_0 \in p^{-1}(x_0)$.
Il existe alors un unique relèvement $\tilde{f} : Z \to Y$ de f d'origine y_0.

Démonstration :

Rappelons d'abord que la simple connexité entraîne la connexité.
Soit $[\delta] = [f \circ \gamma] \in f_*(\pi_1(Z, z_0))$ où $[\gamma] \in \pi_1(Z, z_0)$. Z étant simplement connexe, $[\gamma] = [c_{z_0}]$, donc $[\delta] = [f \circ c_{z_0}] = [c_{x_0}] = [p \circ c_{y_0}] \in p_*(\pi_1(Y, y_0))$.
Donc $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$.

■

Corollaire 3.20

Deux revêtements $p : Y \to X$ et $q : Z \to X$ tels que Y et Z soient simplement connexes et localement connexes par arcs sont isomorphes.
Si de plus on se donne $y \in Y$ et $z \in Z$ tels que $p(y) = q(z)$, alors il existe un unique isomorphisme de revêtements $f : Y \to Z$ envoyant y sur z.

Démonstration :

D'après le corollaire précédent, il existe un unique relèvement $\tilde{p}$ de p tel que $\tilde{p}(y) = z$ et un unique relèvement $\tilde{q}$ de q tel que $\tilde{q}(z) = y$. Alors $\tilde{p} \circ \tilde{q}$ est un automorphisme de revêtement de Z fixant z, par connexité de Z on a $\tilde{p} \circ \tilde{q} = Id_Z$ (3.10). De même $\tilde{q} \circ \tilde{p} = Id_Y$. Donc $\tilde{p}$ est un isomorphisme de revêtements.
L'unicité découle aussi du théorème 3.10.

■

4 Revêtements et groupe fondamental

4.1 Foncteur de monodromie

Pour tout couple $(x_0, x_1) \in X^2$ et pour toute classe de chemins $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0, x_1)$, posons
$$\mu_p([\gamma]) : \begin{array}{ccc} p^{-1}(x_0) & \longrightarrow & p^{-1}(x_1) \\ y & \longmapsto & \tilde{\gamma_y}(1) \end{array}.$$

Lemme 4.1

- $\mu_p([\delta] \circ [\gamma]) = \mu_p([\gamma \perp \delta]) = \mu_p([\delta]) \circ \mu_p([\gamma])$.
- $\mu_p([c_x]) = id_{p^{-1}(x)}$.

Démonstration du lemme :

Posons $i : t \mapsto \frac{1}{2}t$, $j : t \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$ de sorte que $(\gamma \perp \delta) \circ j = \delta$ et $(\gamma \perp \delta) \circ i = \gamma$. Soit $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ où $x_0 = \gamma(0)$. Par définition, $\widetilde{(\gamma \perp \delta)}_{y_0} \circ i$ est un relèvement de γ d'origine y_0, par unicité : $\tilde{\gamma_{y_0}}(1) = \widetilde{(\gamma \perp \delta)}_{y_0}\left(\frac{1}{2}\right)$. Soit $y_1 = \tilde{\gamma_{y_0}}(1) = \mu_p([\gamma])(y_0)$, il est immédiat que $\widetilde{(\gamma \perp \delta)}_{y_0} \circ j$ est un relèvement de δ d'origine y_1, donc par unicité : $\tilde{\delta_{y_1}}(1) = \widetilde{(\gamma \perp \delta)}_{y_0}(1)$.
On a donc $\mu_p([\delta] \circ [\gamma])(y_0) = \mu_p([\gamma \perp \delta])(y_0) = \widetilde{(\gamma \perp \delta)}_{y_0}(1) = \tilde{\delta_{y_1}}(1) = \mu_p([\delta])(y_1) = \mu_p([\delta])(\mu_p([\gamma](y_0)) = (\mu_p([\delta]) \circ \mu_p([\gamma]))(y_0)$.

■

Dans le cas où $x_0 = x_1$, il découle de ce lemme que $\mu_p : \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(p^{-1}(x_0))$ est un morphisme de groupes. μ_p définit donc une action de groupe sur la fibre $p^{-1}(x_0)$.

Définition 4.2 : le foncteur μ_p de monodromie

Soit $p : Y \to X$ un revêtement. On définit le foncteur

$$\mu_p : \left\{ \begin{array}{lcl} \Pi_1(X) & \longrightarrow & \mathcal{E}ns \\ x & \longmapsto & p^{-1}(x) \\ [\gamma] & \longmapsto & \mu_p([\gamma]) \end{array} \right.$$

La vérification est immédiate au vu des résultats de la partie précédente et du lemme 4.1.

En se souvenant qu'un groupe G n'est rien d'autre qu'une catégorie $\underline{G}$ ayant un seul objet $\{*\}$ dont les endomorphismes sont donnés par les éléments de G, on remarque qu'une représentation $G \to \mathrm{Aut}(S)$ (au sens d'action de groupe) est la même chose qu'un foncteur $f : \underline{G} \to \mathcal{E}ns$ tel que $f(*) = S$ et qu'un morphisme de représentations n'est rien d'autre qu'un morphisme de foncteurs, d'où la définition plus générale ci-dessous :

Définitions 4.3

Soient $\mathcal{G}$ un groupoïde et $\mathcal{C}$ une catégorie. Une *représentation de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{C}$* est un foncteur $\mathcal{G} \to \mathcal{C}$.
Un *morphisme de représentations* est un morphisme de foncteurs.
On note $\mathcal{R}ep(\mathcal{G}, \mathcal{C})$ la catégorie des représentations de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{C}$.
Une *représentation triviale* est une représentation qui envoie tout automorphisme de $\mathcal{G}$ vers un morphisme identité de $\mathcal{C}$.

Proposition 4.4

Si p est un revêtement trivial alors sa représentation de monodromie μ_p est triviale.

Démonstration

Soit $p : X \times F \to X$ un revêtement trivial.
Soient $x \in X$ et $\gamma : x \rightsquigarrow x$ un lacet de X.
Soit $y = (x, f) \in p^{-1}(x)$, $\tilde{\gamma}_y : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & X \times F \\ t & \longmapsto & (\gamma(t), f) \end{array}$ est un relèvement de γ d'origine y. Donc $\mu_p([\gamma])(y) = \tilde{\gamma}_y(1) = (\gamma(1), f) = y$.

■

Lorsque X est connexe et localement connexe par arcs, nous verrons plus loin (4.10) que la réciproque est vraie.

Considérons désormais $p_1 : Y_1 \to X$, $p_2 : Y_2 \to X$ deux revêtements ainsi que $f : Y_1 \to Y_2$

un morphisme de revêtements.
Alors f induit, pour tout $x \in X$, des applications $f_x = f_{|p_1^{-1}(x)} : p_1^{-1}(x) \to p_2^{-1}(x)$
En effet $p_2 \circ f = p_1$, donc si $y \in p_1^{-1}(x)$, $p_2(f(y)) = x$ alors $f(y) \in p_2^{-1}(x)$.

Lemme 4.5

Soient $p_1 : Y_1 \to X$, $p_2 : Y_2 \to X$ deux revêtements, $f : Y_1 \to Y_2$ un morphisme de revêtements et $\gamma : x_0 \rightsquigarrow x_1$ un chemin de X.
Nous avons $\mu_{p_2}([\gamma]) \circ f_{x_0} = f_{x_1} \circ \mu_{p_1}([\gamma])$.
Ce qui peut se représenter par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
p_1^{-1}(x_0) \arrow[r, "f_{x_0}"] \arrow[d, "\mu_{p_1}([\gamma])"'] & p_2^{-1}(x_0) \arrow[d, "\mu_{p_2}([\gamma])"] \\
p_1^{-1}(x_1) \arrow[r, "f_{x_1}"'] & p_2^{-1}(x_1)
\end{tikzcd}$$

Démonstration :

Soit $y \in p_1^{-1}(x_0)$. Soient $\tilde{\gamma_y}$ l'unique relèvement de γ à Y_1 d'origine y et $\widetilde{\gamma_{f(y)}}$ l'unique relèvement de γ à Y_2 d'origine $f(y)$.
Alors $p_2 \circ f \circ \tilde{\gamma_y} = p_1 \circ \tilde{\gamma_y} = \gamma$ (car f morphisme de revêtements) et $f \circ \tilde{\gamma_y}(0) = f(y)$.
Par unicitédu relèvement d'origine $f(y)$ il vient : $\widetilde{\gamma_{f(y)}} = f \circ \tilde{\gamma_y}$.
Ainsi $\mu_{p_2}([\gamma])(f_{x_0}(y)) = \widetilde{\gamma_{f(y)}}(1) = f(\tilde{\gamma_y}(1)) = f_{x_1}(\mu_{p_1}([\gamma])(y))$.

■

Ainsi $f : Y_1 \to Y_2$ définit un morphisme de représentations $\mu(f) : \mu_{p_1} \to \mu_{p_2}$. Nous avons clairement $(g \circ f)_x = (g \circ f)_{|p_1^{-1}(x)} = g_{|p_2^{-1}(x)} \circ f_{|p_1^{-1}(x)} = g_x \circ f_x$ et $(id_Y)_x = id_{p^{-1}(x)}$.
Nous avons ainsi défini le :

Définition 4.6 : foncteur de monodromie

$\mu : \mathcal{R}ev(X) \to \mathcal{R}ep(\Pi_1(X), \mathcal{E}ns)$

Qui à un revêtement $p : Y \to X$ de X associe la représentation $\mu(p) = \mu_p$ et qui à un morphisme de revêtements $f : Y_1 \to Y_2$ associe le morphisme de représentations $\mu(f) : \mu_{p_1} \to \mu_{p_2}$ défini par la collection d'applications $f_x : p_1^{-1}(x) \to p_2^{-1}(x)$.

Proposition 4.7

Le foncteur de monodromie μ est fidèle.

Démonstration :

Si $f, g : Y_1 \to Y_2$ sont deux morphismes de revêtements vérifiant $\mu(f) = \mu(g)$, alors, pour tout $x \in X$, $f_{|p_1^{-1}(x)} = g_{|p_1^{-1}(x)}$.
Comme $Y_1 = \bigsqcup_{x \in X} p_1^{-1}(x)$, on a $f = g$.

■

Proposition 4.8

Si X est localement connexe par arcs alors le foncteur de monodromie μ est plein.

Démonstration :

Soit $\Phi : \mu_{p_1} \to \mu_{p_2}$ un morphisme de représentations.

Il induit, pour tout $x \in X$, des applications $\Phi_x : p_1^{-1}(x) \to p_2^{-1}(x)$. Comme Y_1 (resp. Y_2) s'écrit comme partition des ensembles $p_1^{-1}(x)$ (resp. $p_2^{-1}(x)$), ces applications induisent une application $\varphi : Y_1 \to Y_2$ vérifiant $\varphi_{|p_1^{-1}(x)} = \Phi_x$. En particulier $p_2 \circ \varphi = p_1$.
Montrons que φ est continue, s'agissant une propriété locale, on peut supposer sans perte de généralité que X est connexe par arcs et que Y_1 et Y_2 sont des revêtements triviaux $Y_i = X \times F_i$, alors $\varphi : X \times F_1 \to X \times F_2$ est de la forme $\varphi(x, \lambda) = (x, \Phi_x(\lambda))$.
Nous allons montrer que $\Phi_x(\lambda)$ ne dépend pas de x : soit $x' \in X$ et $\gamma : x \rightsquigarrow x'$ un chemin de X. Alors $\Phi_{x'} \circ \mu_{p_1}([\gamma]) = \mu_{p_2}([\gamma]) \circ \Phi_x$, mais p_1 et p_2 étant des revêtements triviaux on a $\mu_{p_i}([\gamma]) = id$. Donc $\varphi = (id, \Phi_x)$ et est donc continue.
Ainsi φ est continue et $\Phi = \mu(\varphi)$.

■

Il découle des deux dernières propriétés qu'étant donnés p et p' deux revêtements de X localement connexe par arcs, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}ev(X)}(p, p')$ est en bijection avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}ep(\Pi_1(X), \mathcal{E}ns)}(\mu_p, \mu_{p'})$.

Un foncteur μ est dit conservateur si pour tout morphisme f, on a : $\mu(f)$ isomorphisme $\Rightarrow f$ isomorphisme (la réciproque est toujours vraie).

Proposition 4.9

Si X est localement connexe alors le foncteur de monodromie μ est conservateur.

Démonstration :

Soit $f : Y_1 \to Y_2$ un morphisme de revêtements tel que $\mu(f)$ soit un isomorphisme. Alors $f_{|p_1^{-1}(x)} : p_1^{-1}(x) \to p_2^{-1}(x)$ est une bijection.
Comme Y_1 (resp. Y_2) s'écrit comme partition des ensembles $p_1^{-1}(x)$ (resp. $p_2^{-1}(x)$), f est bijective.
Montrons que f^{-1} est continue : s'agissant d'une propriété locale, on peut supposer sans perte de généralité que X est connexe et que Y_1, Y_2 sont des revêtements triviaux $Y_i = X \times F_i$, alors $f : X \times F_1 \to X \times F_2$ est de la forme $f = (id_X, g)$ avec $g : F_1 \to F_2$ bijective, donc $f^{-1} = (id_X, g^{-1})$ et est donc continue (F_1 et F_2 sont discrets). Ainsi f est un homéomorphisme.

■

On déduit de cette propriété qu'étant donnés p et p' deux revêtements de X localement connexe par arcs, alors $\mathrm{Isom}_{\mathcal{R}ev(X)}(p, p')$ est en bijection avec $\mathrm{Isom}_{\mathcal{R}ep(\Pi_1(X), \mathcal{E}ns)}(\mu_p, \mu_{p'})$. En particulier p et p' sont isomorphes si et seulement s'il existe un ismorphisme de représentations entre μ_p et μ_p'.

Corollaire 4.10

Soit $p : Y \to X$ un revêtement de base X connexe et localement connexe par arcs.
Alors p est un revêtement trivial si et seulement si sa représentation de monodromie μ_p est triviale.

Démonstration :

$\Rightarrow$: déjà démontrée en 4.4.
$\Leftarrow$: soit $x_0 \in X$, comme X est connexe, toutes les fibres de p sont isomorphes à $F = p^{-1}(x_0)$.
X est connexe par arcs car connexe et localement connexe par arcs. Ainsi $\underline{\pi_1(X, x_0)} \to \Pi_1(X)$ est une équivalence de catégories.
La représentation μ_p revient donc à faire agir le groupe $\pi_1(X, x_0)$ sur l'ensemble F. Par hypothèse cette action est triviale.
La première projection $q : X \times F \to X$ est un revêtement trivial de X, μ_q est donc une représentation triviale d'après le premier sens. Ainsi μ_q revient aussi à faire agir trivialement le groupe $\pi_1(X, x_0)$ sur l'ensemble F.
Considérons $f : X \times F \to Y$ la seconde projection. Soient $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ et $f \in F$, alors $[\gamma] \cdot f(s) = f(s) = f([\gamma] \cdot s)$. Donc f est une bijection π_1−équivariante, et $\mu(f)$ est ainsi un isomorphisme de représentations. D'après 4.9 f est un isomorphisme de revêtements.

Corollaire 4.11

Si X est simplement connexe et localement connexe par arcs alors tout revêtement de X est trivial.

Démonstration :

Soit $p : Y \to X$ un revêtement de X.
X est connexe (car simplement connexe) et localement connexe par arcs, donc X est connexe par arcs. Ainsi $\underline{\pi_1(X, x_0)} \to \Pi_1(X)$ est une équivalence de catégories.
On peut donc considérer que $\Pi_1(X)$ admet un seul objet $(*)$ et que $\mathrm{Hom}_{\Pi_1(X)}(*, *) = \pi_1(X, x_0)$. Mais comme X est simplement connexe, $\pi_1(X, x_0)$ est réduit à son neutre $[c_{x_0}]$. Donc $\Pi_1(X)$ admet un seul objet et un seul morphisme. Le seul automorphisme de $\Pi_1(X)$ est donc $[c_{x_0}]$ et $\mu_p([c_{x_0}]) = Id_{p^{-1}(x_0)}$, ainsi μ_p est une représentation triviale.
D'après 4.10, p est un revêtement trivial.

4.2 Revêtement universel

Nous allons voir qu'un espace topologique « suffisamment gentil » admet un revêtement connexe plus grand que les autres (au sens où les autres en sont des quotients) : il s'agit de celui qui est simplement connexe. L'étude de ces revêtements va nous permettre, selon certaines hypothèses sur X, de mettre en avant la surjectivité essentielle du foncteur de monodromie et donc de montrer qu'il s'agit d'une équivalence de catégories.

Définition 4.12 : revêtement pointé universel

Soit (X, x_0) un *espace pointé*, *i.e.* un espace topologique X muni d'un *point base* $x_0 \in X$, que nous supposerons connexe et localement connexe par arcs. On appelle *revêtement pointé* de (X, x_0) un revêtement $p : Y \to X$ muni d'un point y_0 vérifiant $p(y_0) = x_0$.

On appelle *revêtement pointé universel* de (X, x_0) tout revêtement pointé $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ d'espace total Y connexe vérifiant la propriété universelle suivante :
$\forall q : Z \to X$ revêtement d'espace total Z connexe, $\forall z \in q^{-1}(x_0)$, $\exists f : Y \to Z$ morphisme tel que $f(y_0) = z$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "q"'] & X \end{tikzcd}$$

Remarques :
- Par le théorème 3.10, le morphisme f est unique.
- En adaptant la preuve 3.20, on montre que deux revêtements pointés universels de X sont isomorphes et que cet isomorphisme est unique.
- On dira que $p : Y \to X$ est un revêtement universel s'il existe $x_0 \in X$ et $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ tels que $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ soit un revêtement pointé universel. Deux revêtements universels de X sont isomorphes, mais plus de manière unique.

Un des interêts d'avoir un revêtement universel p est de pouvoir réaliser une identification $\pi_1(X, x) \simeq \mathrm{Aut}(p)$.

Proposition 4.13

Soit X un espace topologique connexe et localement connexe par arcs, soit Y un espace topologique simplement connexe.
Alors tout revêtement $p : Y \to X$ est universel.

Démonstration :

L'application p est un homéomorphisme local, X étant localement connexe par arcs, il en est de même pour Y.
Ainsi Y est simplement connexe (donc connexe) et localement connexe par arcs, d'après le corollaire 3.19 $p : Y \to X$ vérifie donc la propriété universelle.

■

Définition 4.14 : représentation universelle

Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$. On définit la *représentation universelle* μ_{univ} (qui dépend du choix de x_0) par :

$$\mu_{\text{univ}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \Pi_1(X) & \longrightarrow & \mathcal{E}ns \\ x & \longmapsto & \pi_1(X, x_0, x) \\ [\gamma] & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0, x_1) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0, x_2) \\ [\rho] & \longmapsto & [\rho][\gamma] \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{où } \gamma : x_1 \rightsquigarrow x_2$$

Démonstration :

$\mu_{\text{univ}}([\delta] \circ [\gamma])([\rho]) = \mu_{\text{univ}}([\gamma \perp \delta])([\rho]) = [\rho \perp \gamma \perp \delta] = \mu_{\text{univ}}([\delta]) \circ \mu_{\text{univ}}([\gamma])([\rho])$ où $\gamma : x_1 \rightsquigarrow x_2$, $\delta : x_2 \rightsquigarrow x_3$ et $\rho : x_0 \rightsquigarrow x_1$. Donc μ_{univ} est bien une représentation.

■

Soit $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, alors $[\gamma]$ induit un automorphisme $F_{[\gamma]}$ de μ_{univ} défini par

$$(F_{[\gamma]})_x : \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0, x) \\ [\rho] & \longmapsto & [\gamma][\rho] \end{array}.$$

Proposition 4.15

Soit $x_0 \in X$, $\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \text{Aut}(\mu_{\text{univ}}) \\ [\gamma] & \longmapsto & F_{[\gamma]} \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration :

Comme $(F_{[\gamma]})_{x_0}([c_{x_0}]) = [\gamma]$, nous avons $F_\gamma = F_\delta \Leftrightarrow [\gamma] = [\delta]$.
Réciproquement, soit F un automorphisme de μ_{univ}. Posons $[\gamma] = F_{x_0}([c_{x_0}])$. Soit $[\rho] \in \pi_1(X, x_0, x)$, alors nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "F_{x_0}"] \arrow[d, "\mu_{\text{univ}}([\rho])"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[d, "\mu_{\text{univ}}([\rho])"] \\ \pi_1(X, x_0, x) \arrow[r, "F_x"'] & \pi_1(X, x_0, x) \end{tikzcd}$$

Donc $F_x(\mu_{\text{univ}}([\rho])([c_{x_0}])) = \mu_{\text{univ}}([\rho])(F_{x_0}([c_{x_0}]))$ et par conséquent $F_x([\rho]) = [\gamma][\rho]$, on en déduit que $F = F_{[\gamma]}$.
On vérifie facilement que $F_{[\gamma \perp \delta]} = F_{[\delta]} \circ F_{[\gamma]}$, et donc que l'on a un isomorphisme de groupes $\pi_1(X, x_0) \to \text{Aut}(\mu_{\text{univ}})$.

■

Afin de montrer que le foncteur de monodromie est essentiellement surjectif, et qu'il s'agit donc d'une équivalence de catégories, on va montrer qu'étant donné un revêtement $p : Y \to X$, nous avons pour tout $y_0 \in p^{-1}(X)$ un morphisme de représentations $\mu_{\text{univ}} \to \mu_p$. Lorsque Y est simplement connexe, nous verrons de plus qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Lemme 4.16

Soit $p : Y \to X$ un revêtement, alors $\Pi_1(p)$ est fidèle.

Démonstration :

Soient $\gamma, \delta : y_0 \rightsquigarrow y_1$ deux chemins de Y tels que $\Pi_1(p)([\gamma]) = \Pi_1(p)([\delta])$, i.e. $[p\circ\gamma] = [p \circ \delta]$. Donc $p \circ \gamma$ et $p \circ \delta$ sont homotopes.
Mais γ est l'unique relèvement de $p\circ\gamma$ d'origine $\gamma(0) = y_0$ et de même δ est l'unique relèvement de $p \circ \delta$ d'origine $\delta(0) = y_0$.
Ainsi γ et δ sont homotopes, i.e. $[\gamma] = [\delta]$.

■

En particulier p induit un isomorphisme de $\pi_1(Y, y_0)$ vers un sous-groupe H de $\pi_1(X, x_0)$:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y,y_0) & \longrightarrow & H \subset \pi_1(X,x_0) \\ [\gamma] & \longmapsto & [p\circ\gamma] \end{array}$$

Ceci nous permet d'identifier H à $\pi_1(Y, y_0)$: on dira qu'un élément $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ vérifie $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$ si et seulement si son unique relèvement $\tilde{\gamma_{y_0}}$ est un lacet en y_0.

Propositions 4.17

Soient $p : Y \to X$ un revêtement et $x_0 \in X$. Alors pour tout $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ on définit une application $\alpha_x : \begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0,x) & \longrightarrow & p^{-1}(x) \\ [\gamma] & \longmapsto & \mu_p([\gamma])(y_0) \end{array}$.
On a les propriétés suivantes :

1. Étant donné un chemin $\gamma : x \rightsquigarrow x'$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0,x) \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "\mu_{\text{univ}}([\gamma])"'] & p^{-1}(x) \arrow[d, "\mu_p([\gamma])"] \\ \pi_1(X,x_0,x') \arrow[r, "\alpha_{x'}"'] & p^{-1}(x') \end{tikzcd}$$

   Ainsi la famille $(\alpha_x)_{x\in X}$ définit un morphisme de représentations $\alpha : \mu_{\text{univ}} \to \mu_p$.
2. $\alpha_x([\gamma]) = \alpha_x([\delta])$ si et seulement si $[\gamma][\delta]^{-1} \in \pi_1(Y, y_0)$, en particulier $\pi_1(Y, y_0)$ est le sous-groupe d'isotropie de y_0 suivant l'action de $\pi_1(X, x_0)$ sur $p^{-1}(x_0)$.
3. Si Y est simplement connexe alors α est un isomorphisme de représentations. En particulier, deux revêtements simplement connexes sont isomorphes.
4. En particulier, lorsque Y est simplement connexe, $\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0) & \longrightarrow & \text{Aut}(\mu_p) \\ [\gamma] & \longmapsto & \alpha\circ F_{[\gamma]}\circ\alpha^{-1} \end{array}$ est un isomorphisme de groupes (où $F_{[\gamma]}$ est définie en 4.15).
5. Supposons encore que Y soit simplement connexe. En particulier Y est connexe par arcs et pour tout $y \in Y$, il existe un chemin $\delta_Y^y : y \rightsquigarrow y_0$ unique à homotopie près. Posons $\delta^y = p \circ \delta_Y^y : p(y) \rightsquigarrow x_0$.
   Alors pour tout $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, $\alpha \circ F_{[\gamma]} \circ \alpha^{-1} = f_{[\gamma]}$ où

$$(f_{[\gamma]})_x : \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y \\ y & \longmapsto & \mu_p([\delta^y][\gamma][\delta^y]^{-1})(y) \end{array}.$$

2. Voir l'identification réalisée ci-dessus.
3. On retrouve en particulier le résultat de la remarque sur la propriété universelle.

Démonstration :

1. $(\mu_p([\gamma]) \circ \alpha_x)([\delta]) = \mu_p([\gamma]) \circ \mu_p([\delta])(y_0) = \mu_p([\gamma] \circ [\delta])(y_0) = \mu_p([\delta][\gamma])(y_0) = \alpha_{x'}([\delta][\gamma]) = \alpha_{x'}(\mu_{\text{univ}}([\gamma])([\delta])) = (\alpha_{x'} \circ \mu_{\text{univ}}([\gamma]))([\delta])$.
2. D'après l'identification effectuée, on a $[\gamma][\delta]^{-1} \in \pi_1(Y, y_0)$ si et seulement si $(\widetilde{\gamma \perp \delta_{\text{inv}}})_{y_0}$ est un lacet en y_0, et par conséquent :
$$\begin{aligned} [\gamma][\delta]^{-1} \in \pi_1(Y, y_0) &\Leftrightarrow (\mu_p([\delta])^{-1} \circ \mu_p([\gamma]))(y_0) = \mu_p([\gamma][\delta]^{-1})(y_0) = (\widetilde{\gamma \perp \delta_{\text{inv}}})_{y_0}(1) = y_0 \\ &\Leftrightarrow \alpha_x([\gamma]) = \mu_p([\gamma])(y_0) = \mu_p([\delta]) = a_x([\delta]) \text{ en composant à gauche par } \mu_p([\delta]). \end{aligned}$$
3. Soit $x \in X$, alors :
Y étant simplement connexe, on en déduit que $\pi_1(Y, y_0)$ est trivial, i.e. réduit à un élément, d'où l'injectivité de α_x.
Y est aussi en particulier connexe par arcs et donc étant donné $y_1 \in p^{-1}(x)$ il existe un chemin $\gamma : y_0 \rightsquigarrow y_1$ et alors $\mu_p([p \circ \gamma])(y_0) = y_1$ vu que γ est l'unique relèvement de $p \circ \gamma$ d'origine y_0, d'où la surjectivité de α_x.
Toutes les applications α_x étant des isomorphismes, α est un isomorphisme.
4. Immédiat.
5. Soit $y \in p^{-1}(x)$. D'après le point 3, il existe $\rho : x_0 \rightsquigarrow x$ tel que $y = \mu_p([\rho])(y_0)$ et :
$$(\alpha \circ F_{[\gamma]} \circ \alpha^{-1})_x : \begin{array}{ccccccc} p^{-1}(x) & \to & \pi_1(X, x_0, x) & \to & \pi_1(X, x_0, x) & \to & p^{-1}(x) \\ y & \mapsto & [\rho] & \mapsto & [\gamma][\rho] & \mapsto & \mu_p([\gamma][\rho])(y_0) \end{array}.$$
Puis $y_0 = \mu_p([\rho]^{-1})(y)$, donc $(\alpha \circ F_{[\gamma]} \circ \alpha^{-1})_x(y) = \mu_p([\gamma][\rho])(\mu_p([\rho]^{-1})(y)) = \mu_p([\rho]^{-1}[\gamma][\rho])(y)$.
On conclut en remarquant que $\delta^y_{Y,\text{inv}}$ est l'unique relèvement de ρ d'origine y_0 : $\tilde{\rho}_{y_0}$ et $\delta^y_{Y,\text{inv}}$ ont mêmes extrémités dans Y simplement connexe. Donc $[\rho] = [\delta^y]^{-1}$.

■

Nous allons désormais construire un revêtement simplement connexe.
Mais avant cela supposons que $\tilde{p} : \tilde{X} \to X$ soit un revêtement simplement connexe de l'espace X supposé connexe et localement connexe par arcs. Soient U un ouvert trivialisant connexe par arcs et $\varphi : \tilde{p}^{-1}(U) \to U \times F$ une trivialisation de U. Étant donné γ un lacet de U d'origine x, alors tout $f \in F$ définit un relèvement $\tilde{\gamma}_{\varphi^{-1}(x,f)}$ qui est forcément un lacet de $\tilde{X}$ par connexité de U. Par simple connexité de $\tilde{X}$, ce relèvement est homotope au chemin constant en $\varphi^{-1}(x, f)$. Par conséquent $\gamma = \tilde{p} \circ \tilde{\gamma}$ est homotope (sur X et non sur U) au chemin constant en x. On a ainsi vu que tout lacet de U d'origine x était homotope sur X au chemin constant en x.

Définition 4.18

Soit X un espace connexe et localement connexe par arcs. Un ouvert U de X est dit *semi-1-connexe* s'il est connexe par arcs et si tout lacet de U d'origine x est homotope sur X au chemin constant en x.
L'espace X est dit *localement semi-1-connexe* s'il admet un recouvrement par des ouverts semi-1-connexes.

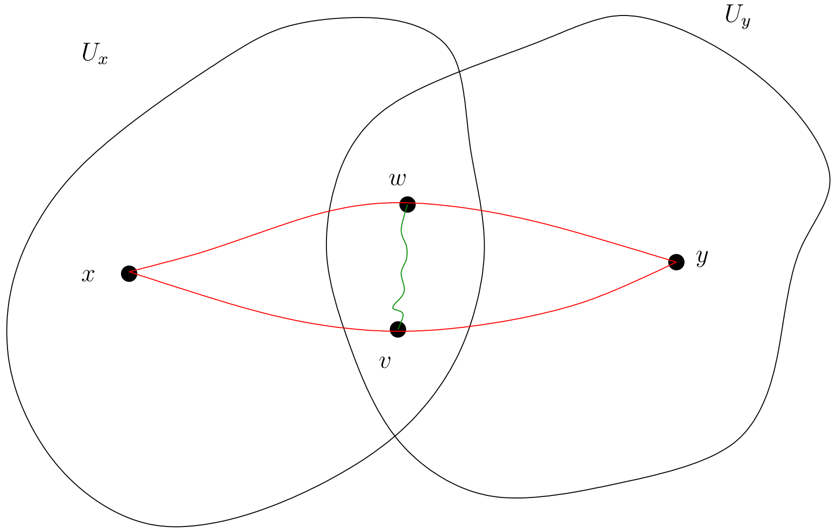
Lemme 4.19

Soit X un espace localement semi-1-connexe.
Soient $x, y \in X$ et U_x (resp. U_y) un voisinage ouvert semi-1-connexe de x (resp. y) et $w \in U_{xy} = U_x \cap U_y$.
Alors il existe un voisinage ouvert V de w tel que pour tout $v \in V$, si l'on se donne $\delta^w_x : x \rightsquigarrow w$, $\delta^v_x : x \rightsquigarrow v$ deux chemins de U_x et $\delta^w_y : y \rightsquigarrow w$, $\delta^v_y : y \rightsquigarrow v$ deux chemins de U_y alors $[\delta^w_y \perp \delta^w_{x,\text{inv}}] = [\delta^v_y \perp \delta^v_{x,\text{inv}}]$ dans $\pi_1(X, y, x)$.

Démonstration :

Comme X est localement connexe par arcs, il existe V un voisinage ouvert connexe par arcs de w vérifiant $w \in V \subset U_{xy}$.
Montrons que V convient :

Soient $v \in V$ et $\delta : w \rightsquigarrow v$ un chemin de $V \subset U_x$. Comme $\delta_x^w \perp \delta \perp \delta_{x,\text{inv}}^v$ est un lacet de U_x d'origine x, il est homotope sur X au chemin constant en x, on en déduit que $[\delta_x^w][\delta] = [\delta_x^v]$. De même on a $[\delta_y^w][\delta] = [\delta_y^v]$.
Ainsi $[\delta_y^w \perp \delta_{x,\text{inv}}^w] = [\delta_y^w][\delta_x^w]^{-1} = [\delta_y^w][\delta][\delta]^{-1}[\delta_x^w]^{-1} = [\delta_y^v][\delta_x^v]^{-1} = [\delta_y^v \perp \delta_{x,\text{inv}}^v]$.



■

Théorème 4.20

Tout espace localement semi-1-connexe admet un revêtement simplement connexe.

On a déjà vu que s'il existe un revêtement simplement connexe $\tilde{p} : \tilde{X} \to X$ alors X admet un recouvrement par des ouverts trivialisants semi-1-connexes et que son foncteur de monodromie est isomorphe à la représentation universelle μ_{univ}. Ces deux faits vont nous guider dans la construction : nous allons construire des revêtements triviaux au-dessus des ouverts semi-1-connexes du recouvrement de X et en déduire un revêtement de X à l'aide du théorème de recollement.

Démonstration :

Soit X un espace localement semi-1-connexe.
Soit $x \in X$ et U_x un voisinage ouvert semi-1-connexe de x. Pour un $x_0 \in X$ fixé posons $p_x : U_x \times \pi_1(X, x_0, x) \to U_x$ le revêtement trivial.
Pour $x \in U_x$ il existe un chemin de U_x $\delta_x^w : x \rightsquigarrow w$ (qui est d'ailleurs unique à homotopie près sur X). Puis pour tout $w \in U_{xy} = U_x \cap U_y$ on pose $\delta_{xy}^w = \delta_y^w \perp \delta_{x,\text{inv}}^w$.
Soit $\varphi_{xy} : \begin{array}{ccc} U_{xy} \times \pi_1(X, x_0, y) & \longrightarrow & U_{xy} \times \pi_1(X, x_0, x) \\ (w, [\gamma]) & \longmapsto & (w, [\gamma][\delta_{xy}^w]) \end{array}$.
On vérifie aisément que la définition de φ_{xy} ne dépend pas du choix de δ_{xy}^w d'après la remarque ci-dessus.
On vérifie de même que φ_{xy} est une bijection d'inverse φ_{yx} et que l'on a $p_x \circ \varphi_{xy} = p_y$.
Soit $w \in U_{xy}$ alors d'après le lemme 4.19 il existe un voisinage ouvert V de w tel que pour tout $v \in V$, $\varphi_{xy}(v, [\gamma]) = (v, [\gamma][\delta_{xy}^w])$, ainsi $\varphi_{xy|V} = id_V \times ([\gamma] \mapsto [\gamma][\delta_{xy}^w])$ qui est un homéomorphisme.
Donc φ_{xy} est un homéomorphisme local, et donc un homéomorphisme car bijectif.
Tout lacet de U_x d'origine x étant homotope sur X au chemin constant en x, il est évident que $\varphi_{xx} = id$.
Soit $w \in U_{xyz} = U_x \cap U_y \cap U_z$, alors $[\delta_{yz}^w][\delta_{xy}^w] = [\delta_z^w][\delta_y^w]^{-1}[\delta_y^w][\delta_x^w]^{-1} = [\delta_{xz}^w]$, donc :

$$\varphi_{xy} \circ \varphi_{yz}(w, [\gamma]) = (w, [\gamma][\delta_{yz}^w][\delta_{xy}^w]) = (w, [\gamma][\delta_{xz}^w]) = \varphi_{xz}(w, [\gamma])$$

On peut donc appliquer le théorème de recollement : il existe un revêtement $p : \tilde{X} \to X$ et des isomorphismes de revêtements $\Phi_x : \tilde{p}^{-1}(U_x) \to U_x \times \pi_1(X, x_0, x)$ (i.e. $p_x \circ \Phi_x = \tilde{p}$).

Montrons désormais que $\tilde{X}$ est simplement connexe, pour cela nous allons avoir besoin du lemme suivant :

Lemme 4.21

Soient $\gamma : x \rightsquigarrow x'$ un chemin de X et $[\rho] \in \pi_1(X, x_0, x)$.
Soit $\tilde{\gamma}$ l'unique relèvement de γ tel que $\Phi_x(\tilde{\gamma}(0)) = (x, [\rho])$.
Alors $\Phi_{\gamma(t)}(\tilde{\gamma}(t)) = (\gamma(t), [\rho][\gamma^t])$ où $\gamma^t(s) = \gamma(st)$.

Nous allons montrer que $J = \{t \in [0,1]$, l'assertion est vraie pour tout $t' \leq t\}$ est un ouvert fermé non-vide de $[0,1]$, et donc est égal à $[0,1]$ par connexité.
Le résultat est vrai pour $t = 0$, donc $J \neq \varnothing$.
Soient $t_0 \in J$ et J_0 un intervalle ouvert contenant t_0 tel que $\gamma(J_0) \subset U_{\gamma(t_0)}$. $U_{\gamma(t_0)}$ étant trivialisant, le chemin $\tilde{\gamma}$ doit prendre ses valeurs dans une même feuille, donc pour tout $t \in J_0$ on a $\Phi_{\gamma(t_0)}(\tilde{\gamma}(t)) = (\gamma(t), [\rho][\gamma^{t_0}])$. On a aussi :

$$\Phi_{\gamma(t)}(\tilde{\gamma}(t)) = \varphi_{\gamma(t)\gamma(t_0)}\Phi_{\gamma(t_0)}(\tilde{\gamma}(t)) = (\gamma(t), [\rho][\gamma^{t_0}][\delta^{\gamma(t)}_{\gamma(t)\gamma(t_0)}]) = (\gamma(t), [\rho][\gamma^{t_0}][\delta^{\gamma(t_0)}_{\gamma(t_0)}])$$

Comme tout chemin $\gamma(t_0) \rightsquigarrow \gamma(t)$ de $U_{\gamma(t_0)}$ est homotope à $\delta^{\gamma(t)}_{\gamma(t_0)}$, on peut le remplacer par $\gamma^t_{t_0}$ défini par $\gamma^t_{t_0}(s) = \gamma(t_0 + s(t - t_0))$. Il suffit ensuite de remarquer que $\gamma^{t_0} \perp \gamma^t_{t_0} \sim \gamma^t$ pour voir que l'assertion est vraie pour tout $t \in J_0$. Ainsi J est ouvert.

Soit $t_0 \in [0,1] \setminus J$, alors il existe $s \leq t_0$ tel que l'assertion soit fausse.
Si $s < t_0$ alors $]s, 1]$ est évidemment un voisinage ouvert de t_0 dans $[0,1] \setminus J$ et donc J est fermé.
Si $s = t_0$: $\Phi_{\gamma(t_0)}(\tilde{\gamma}(t_0)) \neq (\gamma(t_0), [\rho][\gamma^{t_0}])$.
Soit J_0 un intervalle ouvert contenant t_0 tel que $\gamma(J_0) \subset U_{\gamma(t_0)}$. Soit $t \in J_0$ tel que $t < t_0$. Supposons que $\Phi_{\gamma(t)}(\tilde{\gamma}(t)) = (\gamma(t), [\rho][\gamma^t])$ alors :

$$\Phi_{\gamma(t_0)}(\tilde{\gamma}(t)) = \varphi_{\gamma(t_0)\gamma(t)}(\gamma(t), [\rho][\gamma^t]) = (\gamma(t), [\rho][\gamma^t][\delta^{\gamma(t)}_{\gamma(t_0)\gamma(t)}]) = (\gamma(t), [\rho][\gamma^t][\delta^{\gamma(t)}_{\gamma(t_0)}])$$

Comme dans le cas précédent, on peut remplacer $\delta^{\gamma(t)}_{\gamma(t_0)}$ par un chemin $\gamma(t) \rightsquigarrow \gamma(t_0)$ de $U_{\gamma(t_0)}$, prenons $\gamma^{t_0}_t(s) = \gamma(t + s(t_0 - t))$.
On a alors $\gamma^t \perp \gamma^{t_0}_t \sim \gamma^{t_0}$ et donc $\Phi_{\gamma(t_0)}(\tilde{\gamma}(t)) = (\gamma(t), [\rho][\gamma^{t_0}])$.
$U_{\gamma(t_0)}$ étant un ouvert trivialisant, nous savons que $\Phi_{\gamma(t_0)}(\tilde{\gamma}(t))$ est sur la même feuille que $\Phi_{\gamma(t_0)}(\tilde{\gamma}(t_0))$ ce qui est absurde. Donc $]t, 1]$ est un voisinage ouvert de t_0 où l'assertion n'est pas vérifiée. Donc J est fermé. Le lemme est donc démontré. ♦

Montrons désormais que $\tilde{X}$ est connexe par arcs. Soient $y_1 \in p^{-1}(x_1)$ et $y_2 \in p^{-1}(x_2)$ alors il existe un chemin $\gamma : x_0 \rightsquigarrow x_1$ tel que $\Phi_{x_1}(y_1) = (x_1, [\gamma])$ et un chemin $\delta : x_0 \rightsquigarrow x_2$ tel que $\Phi_{x_2}(y_2) = (x_2, [\delta])$.
Soit $\rho = \gamma_{\text{inv}} \perp \delta$ et $\tilde{\rho}$ son uniquement relèvement tel que $\Phi_{x_1}(\tilde{\rho}(0)) = (x_1, [\gamma])$. Alors $\Phi_{x_1}(\tilde{\rho}(1)) = (x_2, [\gamma][\gamma]^{-1}[\delta]) = (x_2, [\delta])$. Donc $\tilde{\rho}$ est un chemin de $\tilde{X}$ d'origine y_1 et d'arrivée y_2.

Il reste à montrer que $\tilde{X}$ est simplement connexe. $\tilde{X}$ étant connexe par arcs, il suffit de montrer que tout lacet $\tilde{\gamma}$ d'origine $y_0 = \Phi^{-1}_{x_0}(x_0, c_{x_0})$ est homotope au chemin c_{y_0} constant en y_0. Soit $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ alors $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ et $\tilde{\gamma}$ est l'unique relèvement de γ d'origine y_0. En particulier d'après le lemme $\Phi_{\gamma(t)}(\tilde{\gamma}(t)) = (\gamma(t), [\gamma^t])$.
Ainsi γ étant un lacet d'origine x_0 on a $\Phi_{x_0}(\tilde{\gamma}(1)) = (x_0, [\gamma]) = (x_0, [c_{x_0}])$, γ est donc homotope sur X au chemin constant c_{x_0}. Puis d'après le théorème de relèvement des homotopies, $\tilde{\gamma}$ est homotope à l'unique relèvement du chemin de X constant en x_0 qui est le chemin de $\tilde{X}$ constant en y_0.

■

Corollaire 4.22

Tout espace localement semi-1-connexe admet un revêtement universel.

Cette construction d'un revêtement simplement connexe induit les corollaires suivants qui nous seront utiles pour montrer la surjectivité essentielle du foncteur de monodromie μ.

Corollaire 4.23

Soit X un espace localement semi-1-connexe et $x_0 \in X$ un point de base.
Pour tout revêtement simplement connexe $\tilde{p} : \tilde{X} \to X$, il existe un recouvrement de $X = \cup_{x \in X} U_x$ par des voisinages ouverts U_x de x semi-1-connexes et des isomorphismes de revêtements $\Phi_x : p^{-1}(U_x) \to U_x \times \pi_1(X, x_0, x)$ tels que les bijections

$$\Phi_x : p^{-1}(x) \to \pi_1(X, x_0, x)$$

définissent un isomorphisme de représentations $\mu_p \to \mu_{\text{univ}}$.

Corollaire 4.24

Soit X un espace localement semi-1-connexe, $\tilde{p} : \tilde{X} \to X$ un revêtement simplement connexe et $\mu_{\tilde{p}}$ sa représentation de monodromie.
Soit $x_0 \in X$ et $\tilde{x_0} \in \tilde{p}^{-1}(x_0)$.
Supposons que l'on ait $X = \cup_{x \in X} U_x$ un recouvrement de X par des voisinages ouverts semi-1-connexes de x ainsi que des isomorphismes de revêtements $\Phi_x : \tilde{p}^{-1}(U_x) \to U_x \times \pi_1(X, x_0, x)$ tels que les bijections $\Phi_x : p^{-1}(x) \to \pi_1(X, x_0, x)$ définissent un isomorphisme $\mu_{\tilde{p}} \to \mu_{\text{univ}}$.
Supposons de plus que $\Phi_{x_0}(\tilde{x_0}) = (x_0, [c_{x_0}])$ et que $\Phi_x(\tilde{x}) = (x, [\delta])$.
Alors nous avons : $\Phi_x(f_{[\gamma]}(\tilde{x})) = (x, [\gamma][\delta])$.

$f_{[\gamma]}$ est défini en 4.17.

Démonstration :

Soit $\tilde{x_0} = \Phi_{x_0}^{-1}(x_0, [c_{x_0}])$.
On déduit de 4.21 que $\Phi_{x_0}(\tilde{x_0}) = (x_0, [\delta][\delta^{\tilde{x}}])$. Donc $[\delta] = [\delta^{\tilde{x}}]^{-1}$ et $\Phi_x(\tilde{x}) = (x, [\delta^{\tilde{x}}]^{-1})$. Ainsi $\Phi = \alpha^{-1}$ (remarquons que Φ dépend du choix d'un x_0 et α du choix d'un $\tilde{x_0}$).
Ce qui permet de conclure.

■

4.3 Théorème : l'équivalence de catégories $\mathcal{R}ev(X) \leftrightarrow \mathcal{R}ep(\Pi_1(X), \mathcal{E}ns)$

Lemme 4.25

Soit $f : S_1 \to S_2$ une application surjective.
Définissons sur S_1 la relation d'équivalence $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.
Alors $\overline{f} : S_1/\sim \to S_2$ est une bijection.

Démonstration :

$\overline{f} : \begin{array}{ccc} S_1/\sim & \longrightarrow & S_2 \\ [x] & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est clairement bien définie.
La surjectivité de f entraîne la surjectivité de $\overline{f}$.
Soient $[x], [y] \in S_1/\sim$ tels que $\overline{f}([x]) = \overline{f}([y]) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow [x] = [y]$. Donc $\overline{f}$ est injective.

■

Théorème 4.26

Soit X un espace localement semi-1-connexe.
Alors le foncteur de monodromie μ est une équivalence de catégories.

Démonstration

Nous avons déjà vu que μ était pleinement fidèle (4.7 et 4.8), il nous reste à montrer que μ est essentiellement surjective.
Soit $x_0 \in X$ et $\tilde{p} : \tilde{X} \to X$ un revêtement simplement connexe avec $\Phi_x : \tilde{p}^{-1}(U_x) \to U_x \times \pi_1(X, x_0, x)$ des isomorphismes de revêtements comme ci-dessus.
Soit $\tilde{x_0} = \Phi_{x_0}^{-1}(x_0, [c_{x_0}]) \in \tilde{p}^{-1}(x_0)$, on obtient ainsi un isomorphisme de groupes $\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathcal{R}ev(X)}(\tilde{X}) \\ [\gamma] & \longmapsto & f_{[\gamma]} \end{array}$. $f_{[\gamma]}$ vérifie que si $\Phi_x(\tilde{x}) = (x, [\delta])$ alors $\Phi_x(f_{[\gamma]}(\tilde{x})) = (x, [\gamma][\delta])$.

Soit $\mu_0 : \Pi_1(X) \to \mathcal{E}ns$ une représentation. Posons alors pour tout $x \in X$, $S_x = \mu_0(x)$ puis $S = S_{x_0}$ ainsi que $\tilde{Y} = \tilde{X} \times S$. Soit $\tilde{q} : \tilde{Y} \to \tilde{X} \to X$ la composition de $\tilde{p}$ avec la projection naturelle $\tilde{Y} = \tilde{X} \times S \to \tilde{X}$.

Définissons sur $\tilde{Y}$ la relation

$$(\tilde{x_1}, s_1) \sim_1 (\tilde{x_2}, s_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}(\tilde{x_1}) = \tilde{p}(\tilde{x_2}) \\ \exists [\gamma] \in \pi_1(X, x_0) \text{ tel que } \tilde{x_2} = f_{[\gamma]}(\tilde{x_1}) \text{ et } s_2 = \mu_0([\gamma]^{-1})(s_1) \end{array} \right.$$

On vérifie facilement qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et on note alors $Y = \tilde{Y}/\sim_1$ son ensemble quotient. Alors l'application $p : \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \overline{(\tilde{x}, s)} & \longmapsto & \tilde{p}(\tilde{x}) \end{array}$ est bien définie.

Nous allons désormais définir une relation d'équivalence sur $U_x \times \pi_1(X, x_0, x) \times S$ de sorte à ce que $\Phi_x \times Id_S$ induise un homéomorphisme $p^{-1}(U_x) \simeq U_x \times (\pi_1(X, x_0, x) \times S)/\sim_2$. Pour cela on pose :

$$(y_1, [\delta_1], s_1) \sim_2 (y_2, [\delta_2], s_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = y_2 \\ s_2 = \mu_0([\delta_1][\delta_2]^{-1})(s_1) \end{array} \right.$$

On vérifie facilement qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et on note alors $Z(U_x) = U_x \times (\pi_1(X, x_0, x) \times S)/\sim_2$ son ensemble quotient.
Remarquons que nous avons $(\tilde{x_1}, s_1) \sim_1 (\tilde{x_2}, s_2)$ si et seulement si $(f_{[\gamma]}(\tilde{x_1}), \mu_0([\gamma]^{-1})(s_1)) = (\tilde{x_2}, s_2)$, ainsi en posant $(x, [\delta]) = \Phi_x(\tilde{x_1})$ c'est équivalent à $(x, [\gamma][\delta], \mu_0([\gamma]^{-1}(s_1))) = (\Phi_x(f_{[\gamma]}(\tilde{x_1})), \mu_0([\gamma]^{-1})(s_1)) = (\Phi_x(\tilde{x_2}), s_2)$, et donc $(\Phi_x(\tilde{x_1}), s_1) \sim_1 (\Phi_x(\tilde{x_2}), s_2)$. Ainsi l'homéomorphisme $\Phi_x \times Id_S$ induit un homéomorphisme $p^{-1}(U_x) \to Z(U_x) = U_x \times (\pi_1(X, x_0, x) \times S)/\sim_2$.

Soit $\Psi_x : \begin{array}{ccc} U_x \times \pi_1(X, x_0, x) \times S & \longrightarrow & U_x \times S_x \\ (y, [\delta], s) & \longmapsto & (y, \mu_0([\delta])(s)) \end{array}$.
Soit $(y, s) \in U_x \times S_x$. Soit $\delta : x \rightsquigarrow x_0$ un chemin de X alors $\Psi_x(y, [\delta]^{-1}, \mu_0([\delta])(s)) = (y, s)$, donc Ψ_x est surjective.
Puis $\mu_0([\delta])(s) = \mu_0([\delta'])(s') \Leftrightarrow s' = \mu([\delta]^{-1}[\delta'])(s)$, donc $\Psi_x(y, [\delta], s) = \Psi_x(y', [\delta'], s') \Leftrightarrow (y, [\delta], s) \sim_2 (y', [\delta'], s')$. Donc d'après le lemme 4.25 $\overline{\Psi_x} : Z(U_x) \to U_x \times S_x$ est bijective. Puis comme Ψ_x est ouverte, il en est de même pour $\overline{\Psi_x}$. Ainsi $\overline{\Psi_x}$ est une application bijective, continue et ouverte, il s'agit donc d'un homéomorphisme.
Par composition, on obtient donc une trivialisation $\Theta_x : p^{-1}(U_x) \to Z(U_x) \to U_x \times S_x$. Donc $p : Y \to X$ est un revêtement :

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_x) = \tilde{p}^{-1}(U_x) \times S/\sim_1 \arrow[r, "\Phi_x \times Id_S", "\sim"'] \arrow[dr] & U_x \times \pi_1(X, x_0, x) \times S/\sim_2 \arrow[r, "\overline{\Psi_x}", "\sim"'] \arrow[d] & U_x \times S_x \arrow[dl] \\
& U_x &
\end{tikzcd}$$

Notons μ_p le foncteur de monodromie de p.
Nous avons des isomorphismes $\Theta_x : p^{-1}(x) \to \{x\} \times S_x \simeq S_x$. Montrons que ces isomorphismes définissent un isomorphisme de représentations $\Theta : \mu_p \to \mu_0$.
Soient $\gamma : x_1 \rightsquigarrow x_2$ un chemin et $\overline{(\tilde{x}, s)} \in p^{-1}(x_1)$. Soit $(x_1, [\delta]) = \Phi_{x_1}(\tilde{x})$ Alors

$$\mu_0([\gamma])(\Theta_{x_1}(\overline{\tilde{x}, s})) = \mu_0([\gamma])(\mu_0([\delta])(s)) = \mu_0([\delta][\gamma])(s)$$

Soit $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}$ l'unique relèvement de γ tel que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$ (ce qui est équivalent à demander $\Phi_{x_1}(\tilde{\gamma}(0)) = (x_1, [\delta])$). Posons encore $\hat{\gamma} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & Y \\ t & \longmapsto & \overline{(\tilde{\gamma}(t), s)} \end{array}$.
Alors $p \circ \hat{\gamma} = \tilde{p} \circ \hat{\gamma} = \gamma$ et $\hat{\gamma}(0) = \overline{(\tilde{x}, s)}$. Ainsi d'après le lemme 4.21 :

$p_{S_x} : U_x \times S_x \to S_x$.

$$\Theta_{x_2}(\mu_p([\gamma]))(\overline{\tilde{x}, s}) = \Theta_{x_2}(\hat{\gamma}(1)) = p_{S_x} \circ \Psi_{x_2}(\Phi_{x_2}(\tilde{\gamma}(1)), s) = p_{S_x} \circ \Psi_{x_2}(x_2, [\delta][\gamma], s) = \mu_0([\delta][\gamma])(s)$$

Donc le diagramme suivant commute, ce qui implique que Θ est un isomorphisme de représentations :

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(x_1) \arrow[r, "\Theta_{x_1}"] \arrow[d, "\mu_p([\gamma])"'] & S_{x_1} \arrow[d, "\mu_0([\gamma])"] \\
p^{-1}(x_2) \arrow[r, "\Theta_{x_2}"'] & S_{x_2}
\end{tikzcd}$$

■

4.4 Une application de l'équivalence de catégories

L'équivalence de catégories obtenue permet de classifier les revêtements. De plus nous savons que deux revêtements sont isomorphes si et seulement leurs foncteurs de monodromie le sont. En voici une application :
Nous allons déterminer tous les revêtements à trois feuilles de $\mathbb{S}^1$ à isomorphisme près.

Calculons d'abord $\Pi_1(\mathbb{S}^1)$.

Un espace topologique est dit contractile si l'application identité est homotope à une application constante.

Proposition 4.27

Tout espace contractile est simplement connexe.

Démonstration :

Soit X un espace contractile.
Alors il existe $a \in X$ et $h : \begin{array}{ccc} [0,1] \times X & \longrightarrow & X \\ (s, x) & \longmapsto & h_s(x) \end{array}$ tels que $h_0 = Id_X$ et $h_1(x) = a$.
Soit $b \in X$, alors $\gamma : s \mapsto h_s(b)$ est un chemin de b à a. Par transitivité X est connexe par arcs.
Soit un lacet $\gamma : a \rightsquigarrow a$ de X d'origine a, alors $g : \begin{array}{ccc} [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & X \\ (s, t) & \longmapsto & h(s, \gamma(t)) \end{array}$ est une homotopie entre γ et le chemin constant en a.
Donc X est simplement connexe.

■

Proposition 4.28

$\mathbb{R}$ est contractile.

Démonstration :

$h : \begin{array}{ccc} [0,1]\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \longmapsto & tx \end{array}$ est une homotopie entre l'identité et l'application constante en 0.

■

Corollaire 4.29

$\mathbb{R}$ est simplement connexe.

Nous avons déjà vu que $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ t & \longmapsto & e^{2\pi it} \end{array}$ est un revêtement. Ce revêtement est trivial dès que l'on retire un point du cercle. On a clairement $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Ainsi le choix de $0 \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ définit une bijection $\Phi : \begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ [\gamma] & \longmapsto & \mu_p([\gamma])(0) \end{array}$ d'après le point 3 de 4.17 car $\mathbb{R}$ est simplement connexe. Remarquons que comme μ_p est une action de groupe sur $p^{-1}(1)$, $\Phi([c_1]) = 0$.
Posons $\gamma_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ t & \longmapsto & e^{2\pi int} \end{array}$.
Le relèvement de γ_n d'origine en 0 est clairement $(\tilde{\gamma_n})_0(t) = tn$, donc $\Phi([\gamma_n]) = \mu_p([\gamma_n])(0) = (\tilde{\gamma_n})_0(1) = n$.
Donc $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \{[\gamma_n],\, n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$.
Il reste à déterminer la structure de groupe sur $\mathbb{Z}$ induite par $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ et Φ. γ_0 est clairement le chemin constant, et donc l'unité. Il est évident $\gamma_{n,\text{inv}} = \gamma_{-n}$. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$, alors $\Phi([\gamma_n][\gamma_m]) = \mu_p([\gamma_n][\gamma_m])(0) = \mu_p([\gamma_m])(\mu_p([\gamma_n])(0)) = \mu_p([\gamma_m])(n)$. γ_m admet pour relèvement d'origine $n : t \mapsto tm + n$, donc $\mu_p([\gamma_m])(n) = n + m$.
Ainsi $\Phi([\gamma_n][\gamma_m]) = m + n = \Phi([\gamma_{n+m}])$.
Comme Φ est bijective, nous avons montré que la structure de groupe était donnée par $[\gamma_n][\gamma_m] = [\gamma_{n+m}]$.
On retrouve ainsi la structure de groupe usuelle de $\mathbb{Z}$.
Puis comme $\mathbb{S}^1$ est connexe par arcs, $\Pi_1(\mathbb{S}^1)$ est équivalent à $\underline{\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)}$ et donc à $\underline{\mathbb{Z}}$.
Nous avons ainsi montré :

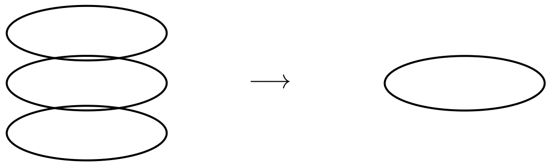
Proposition 4.30

$\Pi_1(\mathbb{S}^1)$ est équivalent à $\underline{\mathbb{Z}}$.

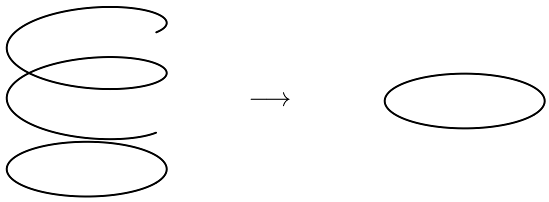
Donc d'après le théorème, rechercher les revêtements de $\mathbb{S}^1$ à trois feuilles revient à chercher les morphismes de groupes $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathfrak{S}_3 = \mathrm{Aut}(\{0,1,2\})$, comme
$\mathfrak{S}_3 = (I, (0,1), (1,2), (0,2), (0,1,2), (0,2,1))$ et qu'un morphisme est déterminé par le choix de $\varphi(1)$ ($\mathbb{Z}$ additif), $\mathbb{S}^1$ admet au plus six revêtements à trois feuilles à isomorphisme près.
Soient $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{Z} \to \mathfrak{S}_3$ deux morphismes de groupes, alors leurs deux revêtements associés sont isomorphes si et seulement s'il existe $f \in \mathfrak{S}_3$ tel que $\forall z \in \mathbb{Z}$, $\varphi_2(z) \circ f = f \circ \varphi_1(z)$. Comme $\mathbb{Z}$ est additif, il suffit de vérifier le cas $z = 1$.
Ainsi les revêtements associés à φ_1 et φ_2 sont isomorphes si et seulement si $\varphi_1(1)$ et $\varphi_2(1)$ sont conjugués.
Donc $\mathbb{S}^1$ admet, à isomorphisme près, trois revêtements à trois feuilles associés aux classes de I, $(0,1)$ et $(0,1,2)$.

On peut se convaincre de ces constructions en utilisant l'identification réalisée entre le choix de l'action $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathfrak{S}_3$ et μ_{p_φ}. En particulier nous pouvons comparer $\varphi(1)$ et $\mu_{p_\varphi}([\gamma_1])$.

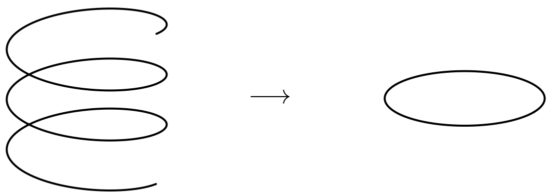
Explicitons le revêtement associé à $I : \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$



à $(0,1)$: $\begin{array}{ccccccc} \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 & \simeq & \mathbb{S}^1 & \sqcup & [0,1]/_{0\sim 1} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & & x & & & \longrightarrow & x \\ & & & & t & \longrightarrow & e^{4\pi i t} \end{array}$



à $(0,1,2)$: $\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 \simeq [0,1]/_{0\sim 1} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ t & \longmapsto & e^{6\pi i t} \end{array}$



Références

[1] Adrien Douady and Régine Douady. *algèbre et théories galoisiennes*. Nouvelle bibliothèque mathématique. Cassini, 2005. Deuxième édition, complètement refondue et augmentée d'un chapitre.

[2] Claude Godbillon. *Éléments de topologie algébrique*. Collection méthodes. Hermann, 1971.

[3] Frédéric Paulin. Topologie algébrique élémentaire. http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_topoalg.pdf, 2009–2010.

[4] Ingo Waschkies. Introduction to algebraic topology. http://math.unice.fr/~ingo/ws200910/M2TopAlg/Doc/topalg.pdf, 09 2010.