Université Nice Sophia Antipolis 2012–2013
L1 - Option Maths Jean-Baptiste Campesato

DEVOIR MAISON N°1

à rendre le 29/11/2012

La note tiendra compte de la rédaction et de la présentation.
IL FAUT TOUT JUSTIFIER.
*Il s'agit d'un travail **individuel**.*

Exercice 1 : jeux

Dans toute la suite, nous considérons des jeux à deux joueurs. Le premier joueur sera toujours A et le second joueur sera toujours B. Les joueurs jouent alternativement.
On dit que le jeu admet une stratégie gagnante pour le premier joueur (resp. le second joueur) s'il existe une stratégie pour A (resp. B) lui permettant de gagner toutes les parties.

1. Un jeu peut-il admettre une stratégie gagnante pour le premier joueur et une stratégie gagnante pour le second joueur ?
2. *Un jeu de Nim :* on place n allumettes sur une table. Les joueurs retirent alternativement 1, 2 ou 3 allumettes. Le joueur qui prend la dernière allumette a perdu.
   (a) Supposons $n \equiv 1[4]$. Existe-t-il une stratégie gagnante pour le premier joueur ? pour le second joueur ?
   (b) Traiter les cas $n \equiv 0[4]$, $n \equiv 2[4]$ et $n \equiv 3[4]$ en utilisant la question précédente.
3. On considère l'équation $x^3 + *x^2 + *x + *$. Le joueur A remplace une des étoiles par un entier non nul. Puis B remplace une autre étoile par un entier. Enfin, A remplace la dernière étoile par un entier.
   Montrer que A peut jouer de sorte que les trois racines de l'équations soient entières.
4. On considère l'équation $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + *$. Les joueurs A et B remplacent alternativement une étoile du polynôme par un entier. Le joueur A gagne si le polynôme obtenu est sans racine entière. Sinon, le joueur B gagne.
   Montrer que le jeu admet une stratégie gagnante pour le second joueur.

Exercice 2 : principe d'invariance

1. Montrer que $\min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.
2. Soit n un entier positif impair. Évariste commence par écrire au tableau tous les nombres 1, 2,...,2n. Il en sélectionne deux de son choix, a et b, les efface et écrit au tableau $|a - b|$.
   Montrer qu'à la fin il restera un nombre impair au tableau.

Exercice 3 : nombre d'or

On définit le *nombre d'or* comme l'unique réel $\varphi > 0$ vérifiant $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.

1. Déterminer φ.
2. Montrer que φ est irrationnel en donnant son développement en fraction continue.

Exercice 4 : le principe des tiroirs

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $n > m$. Le principe des tiroirs affirme que si n chaussettes occupent m tiroirs alors au moins un tiroir contient strictement plus d'une chaussette.
Utiliser ce principe pour répondre à la question suivante :
Des personnes, au nombre de $n \geq 2$, se rencontrent à une soirée. Montrer qu'il y a toujours deux personnes qui ont serré exactement le même nombre de mains.