CORRECTION DE L'INTERROGATION N°1

Exercice 1

1. Montrons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\wp(n)$:« $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ » par récurrence.
   Initialisation au rang $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ et $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$.
   Hérédité : supposons la propriété $\wp(n)$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons $\wp(n+1)$.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \qquad \text{par hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$
   Ce qui clôt la récurrence.

2. Montrons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\wp(n)$:« $\forall x \geq -1,\ (1+x)^n \geq 1 + nx$ » par récurrence.
   Initialisation au rang $n = 0$: soit $x \geq -1$ alors $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0$.
   Hérédité : supposons la propriété $\wp(n)$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons $\wp(n+1)$.
   Soit $x \geq -1$ alors
$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) &\geq (1+nx)(1+x) \qquad \text{par HR et car } 1+x \geq 0\\ &= 1 + (n+1)x + nx^2\\ &\geq 1 + (n+1)x\end{aligned}$$
   Ce qui clôt la récurrence.

Exercice 2

1.

Méthode 1 : l'algorithme d'Euclide	Méthode 2 : décomposition en facteurs premiers
$54 = 34 \times 1 + 20$ $34 = 20 \times 1 + 14$ $20 = 14 \times 1 + 6$ $14 = 6 \times 2 + 2$ $6 = 2 \times 3 + 0$ Donc $\mathrm{pgcd}(54, 34) = 2$.	Nous avons $34 = 2 \times 17$ et $54 = 2 \times 3^3$. Donc $\mathrm{pgcd}(54, 34) = 2$.

2. $\mathrm{pgcd}(54, 34) \times \mathrm{ppcm}(54, 34) = 54 \times 34 \Rightarrow \mathrm{ppcm}(54, 34) = \frac{54 \times 34}{2} = 27 \times 34 = 918$.

Exercice 3

1. Nous avons $a = bq + r$ avec $b > r$ donc $\left.\begin{array}{l}\mathrm{pgcd}(a,b)|a\\ \mathrm{pgcd}(a,b)|b\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{pgcd}(a,b)|a - bq = r$. Ensuite, soit δ un diviseur commun à b et r, alors $\delta|bq + r = a$, ainsi $\delta|a$ et $\delta|b$ donc $\delta|\mathrm{pgcd}(a,b)$.
   Nous avons donc que $\mathrm{pgcd}(a,b)|b$, $\mathrm{pgcd}(a,b)|r$ et que tout diviseur commun à b et r divise $\mathrm{pgcd}(a,b)$, donc $\mathrm{pgcd}(b,r) = \mathrm{pgcd}(a,b)$.

2. Posons $a_0 = a$ et $a_1 = b$, l'algorithme d'Euclide nous donne une suite de divisions euclidiennes :
$$\begin{aligned}a_0 &= a_1 \times q_1 + a_2\\ a_1 &= a_2 \times q_2 + a_3\\ &\vdots\\ a_n &= a_{n+1} \times q_{n+1} + 0\end{aligned}$$
   (on admet que l'algorithme se termine par une division euclidienne ayant un reste nul).

Et par la question 1. $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(a_0, a_1) = \mathrm{pgcd}(a_1, a_2) = \cdots = \mathrm{pgcd}(a_{n+1}, 0) = a_{n+1}$.

Exercice 4

- Méthode 1 : supposons que $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ irréductible, alors $a^2 = pb^2$. Ainsi $p|a^2 \Rightarrow p|a$ (par le lemme d'Euclide puisque p est premier). Donc $a = pa'$ pour un entier a'. Ainsi $pb^2 = a^2 = p^2a'^2 \Rightarrow b^2 = pa'^2$. Donc $p|b^2 \Rightarrow p|b$ comme précédemment. Ainsi $p|a$ et $p|b$, on obtient donc une contradiction (la fraction est supposée irréductible).
- Méthode 2 : supposons que $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$, alors $a^2 = pb^2$. Le terme de gauche a un nombre pair de facteurs premiers dans sa décomposition et le terme de droite a un nombre impair de facteurs premiers dans sa décomposition, ce qui contredit l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

Exercice 5

1. $3 \times 4^0 + 0 \times 4^1 + 2 \times 4^2 = 3 + 2 \times 16 = 35$. Donc $\overline{203}^4 = \overline{35}^{10}$.
2. $$\begin{aligned} 105 &= 5 \times 21 + 0 \\ 21 &= 5 \times 4 + 1 \\ 4 &= 5 \times 0 + 4 \end{aligned}$$
   Donc $\overline{105}^{10} = \overline{410}^5$.
3. (a) $\overline{10011}^2 + \overline{11001}^2 = \overline{101100}^2$.

   (b) $\overline{1234}^9 + \overline{5678}^9 = \overline{7023}^9$.

   On peut se ramener dans la base 10 pour réaliser une vérification.

Exercice 6

Nous avons $v_{n+1} = u_{n+1} + r = 2u_n - 1 + r = 2(u_n + r) - 2r - 1 + r = 2v_n - 1 - r$. Pour que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique il faut et il suffit que $-1 - r = 0 \Leftrightarrow r = -1$ (on peut ensuite vérifier que $v_n = u_n - 1$ est géométrique avec la méthode usuelle de terminale).
Ensuite $v_n = 2^n v_0 = 2^n(u_0 - 1) = 3 \times 2^n$ et $u_n = v_n - r = 3 \times 2^n + 1$.
Donc le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_n = 3 \times 2^n + 1$.