

FEUILLE DE RÉVISION

le 04/10/2012


Attention : interrogation jeudi prochain (11/10).
 

Exercice 1 : raisonnement par récurrence

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 6|3^n - 3$.
 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n cercles dans le plan. Ils divisent le plan en régions. Montrer que l'on peut colorier le plan à l'aide de deux couleurs de sorte que deux régions frontalières (i.e. possédant un arc de cercle en commun) n'aient pas la même couleur.
 3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
 (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
 4. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :
 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « dans une boîte contenant n feutres, tous les feutres sont de la même couleur ».
Initialisation au rang $n = 1$: si une boîte contient un seul feutre, la propriété est évidente.
Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$.
 Considérons maintenant une boîte contenant $n + 1$ feutres. On retire un feutre de la boîte et alors, par hypothèse de récurrence, tous les feutres restants sont de la même couleur. On remet le feutre, et on retire un autre feutre, par hypothèse de récurrence, tous les feutres restants sont de la même couleur et en particulier le premier feutre. Et donc tous les feutres sont de la même couleur.
 Ce qui clôt la récurrence. ■
- Corollaire** : on ne peut pas avoir une boîte à feutres contenant des feutres de couleurs différentes.

Exercice 2 : bases numériques

1. Convertir $\overline{254}^7$ en base 10.
2. Convertir $\overline{631}^{10}$ en base 7.
3. Calculer dans la base : (a) $\overline{1001}^2 + \overline{1101}^2$ (b) $\overline{1001}^5 + \overline{1101}^5$ (c) $\overline{123}^7 + \overline{456}^7$
 (Pensez à faire les vérifications en convertissant en base 10)

Exercice 3 : arithmétique élémentaire

1. Calculer le pgcd de 126 et de 230. En déduire leur ppcm.
2. Combien $15!$ admet-il de diviseurs ?
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que le quotient de la division euclidienne de a par b soit non nul. Montrer que a est supérieur au double du reste.

Exercice 4 : application des mathématiques

1. Paul place 1000€ sur un PEL rémunéré à 4% par an et ajoute 100€ par an. Combien d'années mettra son capital à tripler ?
2. Pierre achète 100 lapins pour faire un élevage. Leur nombre double chaque année et Pierre mange un lapin par mois. Combien de lapins aura Pierre au bout de 10, 20 et 30 ans ?