TD DU 6/12/12

Problème 1 : l'armée solitaire (ou les soldats de Conway)

On se donne un nombre *fini* de pions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_-$ (ie des points d'ordonnées inférieures ou égales à 0).
On autorise les mouvements du solitaire.
L'objectif de l'exercice est de montrer que l'ordonnée maximale que l'on peut atteindre avec ces mouvements est 4.

1. Étudier brièvement le fait que l'on puisse atteindre les ordonnées 1, 2, 3 et 4.
   Dans chaque cas, donner le nombre minimal de mouvements et le nombre minimal de pions.
2. Soit $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On étiquette la position que l'on souhaite atteindre (cible) par $\sigma^0 = 1$. Et toutes les autres positions sont étiquetées par σ^n où n est le nombre de cases entre la case et la cible (distance de Manhattan).
   À une configuration C de pions, on associe $F(C) = \sum_{i\in C} \sigma^{n_i}$.
   Lors d'un mouvement, il y a trois cas à considérer :
   (a) Saut positif : le pion se rapproche de la cible.
   (b) Saut neutre : le pion reste à égale distance de la cible.
   (c) Saut négatif : le pion s'éloigne de la cible.

   Dans chaque cas, étudier la variation de $F(C_n)$ lorsque l'on passe d'une configuration C_n à la configuration C_{n+1} par un mouvement.
3. En déduire que si l'on fixe σ étant le nombre d'or (la solution positive de $x^2 + x - 1 = 0$), alors $F(C_n)$ est décroissante.
4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sigma^{k+2} = \sigma^k - \sigma^{k+1}$.
5. Déduire de la question précédente que $\sum_{k=2}^{+\infty} \sigma^k = 1$.
   Comment aurait-on pu obtenir ce résultat autrement ?
6. Supposons que la cible soit $(0, 1)$.
   (a) Faire un schéma avec les étiquettes.
   (b) Considérons C_0 la configuration initiale où toutes les cases d'ordonnées ≤ 0 sont occupées. Calculer $F(C_0)$.
7. Même question pour $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(0, 4)$ et $(0, 5)$.
8. En déduire que l'on ne peut pas atteindre une case d'ordonnée 5 avec un nombre fini de pions dans la configuration initiale.

Problème 2

On se donne un damier (10×10).
On choisit 9 cases sur lesquelles on dépose une bactérie. On obtient ainsi une situation initiale au temps $n = 0$.
Si au temps n une case est au contact (par deux de ses côtés) à deux cases contaminées, alors elle est contaminée au temps $n + 1$.
Une case contaminée au temps n reste contaminée au temps $n + 1$.
Montrer que l'on ne peut pas trouver de configuration initiale de sorte que les 100 cases deviennent contaminées.