DEVOIR LIBRE

À rendre le 17/12/12

La note tiendra compte de la rédaction et de la présentation.
IL FAUT TOUT JUSTIFIER.
Il s'agit d'un travail ***individuel****.*

Suites équivalentes

Définition : on dit que deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont équivalentes s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ tendant vers 1 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$. On note $u_n \sim v_n$. Il s'agit d'une relation d'équivalence.
Caractérisation : lorsque $(v_n)_n$ est non nulle à partir d'un certain rang, $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$.
Proposition : si $u_n \sim v_n$, alors soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ont toutes les deux une limite, et en l'occurrence la même, soit aucune ne possède de limite.
Proposition : si $u_n \sim v_n$ et si $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.

Problème : intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \mathrm{d}t$.

1. Montrer par un changement de variable que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à termes strictement positifs.
   (b) En déduire qu'elle converge.
4. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $n I_n = (n-1) I_{n-2}$ **(1)**.
5. (a) Montrer que $I_{n+1} \sim I_n$ (on pourra utiliser la monotonie de (I_n) ainsi que la relation **(1)** pour conclure avec le théorème des gendarmes).
   (b) Déduire de la relation **(1)** que la suite $((n+1)I_n I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (c) Déduire des questions précédentes que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
   (d) En déduire $\lim\limits_{n\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\infty} \sqrt{n} \cdot I_n$.
6. (a) Déduire de la relation **(1)** que

$$I_{2p} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

   et que

$$I_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p+1)} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

   Attention : il y a, à chaque fois, deux égalités à montrer !
   On retrouve que la suite $((n+1)I_n I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{p\infty} \dfrac{2^{4p}(p!)^4}{((2p)!)^2 p} = \pi$ *(Formule de Wallis).*

Exercice 1

1. Donner le $\mathrm{DL}_3(2)$ de $x \mapsto \sqrt{x}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$.

Exercice 2

Prouver que les fonctions suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation. On étudiera la position de la courbe par rapport à son asymptote.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

Exercice 3

Donner une primitive de :

1. $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ (on pourra commencer par un changement de variable).
2. $x \mapsto \dfrac{x^3+2x}{x^2+x+1}$ (on pourra commencer par réaliser une division euclidienne).