CORRECTION DE L'INTERROGATION N°1

Exercice 1

1. (a) Une solution particulière est $\frac{5\pi}{6}$, donc $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.
   Remarque : on pouvait directement trouver sur le cercle trigonométrique que les solutions dans $[0, 2\pi]$ sont $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ et $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ et en déduire que sur $\mathbb{R}$, on a donc $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) \in [-1, 1]$, il n'y a pas de solutions ($\pi > 1$).

   (c) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(= \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ou $\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 4\pi n$ ou $x = \frac{3\pi}{2} + 4\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$.
   $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

2. Une solution particulière est $-\frac{\pi}{6}$, donc $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

1. Attention, ce n'était pas un taux d'accroissement, ni même une forme indéterminée :
   $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x - 1} = 0.$

2. $\lim_{x\to e} \frac{\ln(x) - 1}{x - e} = \lim_{x\to e} \frac{\ln(x) - \ln(e)}{x - e} = ln'(e) = e^{-1}.$

3. $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = x + 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 2.$
   Remaque : on pouvait aussi reconnaître le taux d'accroissement de $x \mapsto x^2$ en 1.

4. $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$
   $= \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$
   Remarque : on pouvait aussi reconnaître le taux d'accroissement de $x \mapsto \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ en 0.

Exercice 3

1. $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Donc $-1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$.
   Donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

2. $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Exercice 4

1. Remarquons que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est borné, donc $\lim_{x\to 0} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$.
   Donc f est continue en 0.

2. $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite.
   Donc f n'est pas dérivable en 0.