Correction de l'interrogation n°2

Exercice 1

1. - Soient $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n') \Rightarrow 2n = 2n' \Rightarrow n = n'$. Donc f est injective.
   - L'application f n'atteint pas les nombres impairs, elle n'est donc pas surjective, et n'est donc pas bijective.
     Par exemple, supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 3$ alors $n = \frac{3}{2}$, contradiction.
2. - Soient $x, x' \in [1, +\infty[$ tels que $g(x) = g(x') \Rightarrow x^2 - 1 = x'^2 - 1 \Rightarrow x^2 = x'^2 \Rightarrow x = x'$ puisque $x, x' \geq 1 > 0$. Donc g est injective.
   - Soit $y \in [0, +\infty[$, alors $g(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y+1}$ puisque $x \geq 1 > 0$. Donc $g(\sqrt{y+1}) = y$. Donc g est surjective.
   - D'après les deux points précédents, g est bijective de réciproque $g^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$.

Exercice 2

1. La restriction de cos à $[0, \pi]$ est une bijection $\cos_{|[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$. On définit $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ comme la réciproque de $\cos_{|[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$.
2. Par définition, $\arccos(\cos x) = x$ sur $[0, \pi]$. Puis $\arccos(\cos x) = \arccos(\cos(-x)) = -x$ sur $[-\pi, 0]$. On termine le graphe en utilisant la 2π-périodicité de cos :
3. (a) $\arccos\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ puisque $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.
   (b) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.
   (c) $\arccos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$.
   (d) $\arccos\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(\cos \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.
4. Nous savons que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, donc $\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2 \Rightarrow \cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$.
   Puis $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos \geq 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   Finalement, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Exercice 3

1. La fonction sinus hyperbolique est $\mathrm{sh} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$.
2. Considérons $f(x) = x - \mathrm{sh}\, x$ sur $\mathbb{R}_+$. Alors f est dérivable et $f'(x) = 1 - \mathrm{ch}\, x \leq 0$. Donc f est décroissante et $f(0) = 0$. Donc pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq f(0) = 0 \Rightarrow x \leq \mathrm{sh}\, x$.
3. $3\,\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x - 3 = e^x + 2e^{-x} - 3$, donc $3\,\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x + 2e^{-x} - 3 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$.
   On pose $X = e^x$ et $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow X \in \{1, 2\}$. Donc $x = \ln(1) = 0$ ou $x = \ln(2)$.
4. Nous savons que $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, donc $\mathrm{ch}^2(\mathrm{argsh}\, x) = 1 + \mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}\, x) = 1 + x^2 \Rightarrow \mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\, x) = \pm\sqrt{1 + x^2}$. Puis comme ch est positif, $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\, x) = \sqrt{1 + x^2}$.
   Puis $\mathrm{sh}(2\,\mathrm{argsh}\, x) = 2\,\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}\, x)\,\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\, x) = 2x\sqrt{1 + x^2}$.

Exercice 4

Pour $x > 0$, appliquer le théorème des accroissements finis à ln sur $[x, x + 1]$ et conclure.

Exercice 5

Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, appliquer le théorème des accroissements finis à sin sur $[0, x]$ et conclure.