Jean-Baptiste Campesato

INTERROGATION N°2

Le 13/11/2012

Durée 1h

Aucun document n'est autorisé.
Pas de calculatrice.
La note tiendra compte de la rédaction.
IL FAUT TOUT JUSTIFIER.
Bon courage.

Exercice 1

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}$.
2. $g : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array}$.

En cas de bijectivité, vous préciserez l'application réciproque.

Exercice 2

1. Rappeler la définition de arccos.
2. Tracer le graphe de $\arccos(\cos(x))$ sur $[-2\pi, 3\pi]$.
3. Calculer :
   (a) $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
   (b) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
   (c) $\arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$
   (d) $\arccos\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
4. Expliciter $\cos(\arcsin(x))$.

Exercice 3

1. Rappeler la définition de la fonction sinus hyperbolique (sh) et tracer son graphe.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{sh} x \geq x$.
3. Résoudre $3 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x - 3 = 0$.
4. Simplifier $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)$ puis $\operatorname{sh}(2 \operatorname{argsh} x)$.

Exercice 4

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall x > 0,\ \dfrac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$.

Exercice 5

À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin x \leq x$.