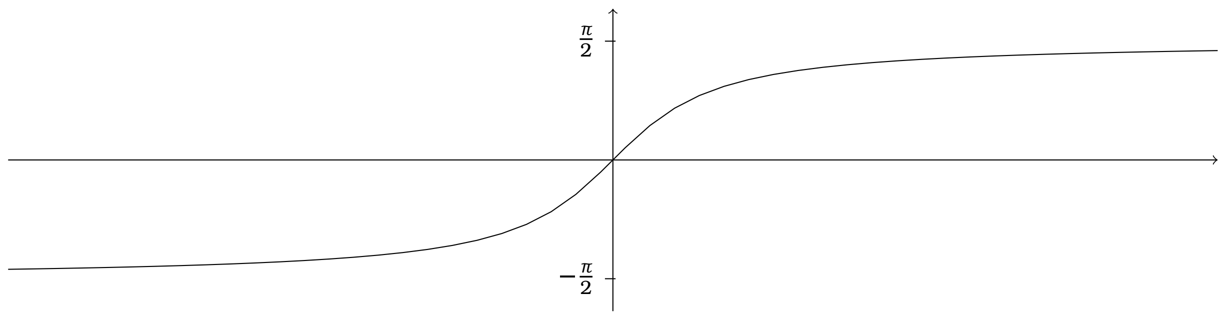
Corrigé du partiel du 28/11/2012

Problème

1. La fonction arctan est la réciproque de $\tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[} : \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ (la restriction de tan à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$).



$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$

2. Soit $p \geq 0$. Par stricte croissance de arctan, $\arctan(p+1) > \arctan(p)$ d'où la première inégalité.
Ensuite $\arctan(p+1) < \frac{\pi}{2}$ (1) et $0 \leq \arctan(p) \Rightarrow -\arctan(p) \leq 0$ (2). On obtient la seconde inégalité en sommant (1) et (2).

3. D'après la question précédente $\tan(\arctan(p+1) - \arctan(p))$ est bien défini, puis
$$\tan(\arctan(p+1) - \arctan(p)) = \frac{\tan(\arctan(p+1)) - \tan(\arctan(p))}{1 - \tan(\arctan(p+1))\tan(\arctan(p))} = \frac{p+1-p}{1+(p+1)p} = \frac{1}{p^2+p+1}$$
On conclut en appliquant arctan :
comme $\arctan(p+1) - \arctan(p) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(\arctan(p+1) - \arctan(p))) = \arctan(p+1) - \arctan(p)$.

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=0}^{p} \arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan(p+1) - \arctan(0) = \arctan(p+1) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$

5. Si $x = 0$, le résultat est clair.
Supposons $x > 0$ et appliquons le théorème des accroissements finis à arctan sur le segment $[0,x]$: il existe $c \in [0,x]$ tel que $\frac{\arctan(x)}{x} = \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x-0} = \arctan'(c) = \frac{1}{1+c^2} \leq 1 \Rightarrow \arctan(x) \leq x$.

6. D'après la question précédente $\displaystyle\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) \leq \frac{1}{k^2+k+1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{p} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) \leq \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k^2+k+1}$
et on conclut en passant à la limite :
$$\frac{\pi}{2} \leq \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k^2+k+1}$$

7. $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{1}{p^2+p} > \dfrac{1}{p^2+p+1}$ puisque $p^2+p+1 > p^2+p > 0$.

8. Immédiat.

9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k^2+k+1} = 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2+k+1} \leq 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 + 1 - \frac{1}{p+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$
On conclut avec la question 4.

Exercice 1

1. $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$.

2. $\dfrac{\sin(x) - x}{x^3} = \dfrac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = -\dfrac{1}{6} + o(1) \underset{x\to0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{6}$.

Exercice 2

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{ch}(x)-1}{x-1} = \frac{0}{-1} = 0$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{ch}(x)-1}{x} = \text{ch}'(0) = \text{sh}(0) = 0$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{ch}(x)-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{\text{ch}(x)-1}{x} = 0$

Exercice 3

Montrons par récurrence $\mathscr{P}(n)$:« $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$ » $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation au rang $n = 0$: soit $x \in \mathbb{R}$ alors $|\sin(0 \cdot x)| = 0 = 0 \cdot |\sin(x)|$.

Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sin((n+1)x) = \sin(nx + x) = \sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x)$ et ainsi

$$\begin{array}{rcll} |\sin((n+1)x)| & = & |\sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x)| & \\ & \leq & |\sin(nx)||\cos(x)| + |\cos(nx)||\sin(x)| & \text{par inégalité triangulaire} \\ & \leq & |\sin(nx)| + |\sin(x)| & \text{car } |\cos| \leq 1 \\ & \leq & n|\sin(x)| + \sin(x) & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & (n+1)|\sin(x)| & \end{array}$$

Ce qui clôt la récurrence.