Partiel du 28/11/2012

Durée 1h30

Aucun document n'est autorisé.
Tout matériel électronique est interdit (calculatrice, téléphone. . .).
La note tiendra compte de la présentation et de la rédaction.
Lisez bien l'énoncé.
Bon courage.

Problème

On rappelle la formule $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ $(\bigstar)$.

1. Donner la définition et le graphe de arctan.
   Préciser les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que
$$\forall p \geq 0,\ 0 < \arctan(p+1) - \arctan(p) < \frac{\pi}{2}$$
3. En déduire, en appliquant $(\bigstar)$, que
$$\forall p \geq 0,\ \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$$
4. En déduire que
$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \frac{\pi}{2}$$
5. En utilisant le théorème (ou l'inégalité) des accroissements finis, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan(x) \leq x$$
6. En déduire que
$$\frac{\pi}{2} \leq \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k^2+k+1}$$
7. Montrer que $\forall p > 0$,
$$\frac{1}{p^2+p+1} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$
8. En déduire que
$$1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2+k+1} \leq 1 + \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
9. Conclure que l'on a l'encadrement suivant :
$$\frac{\pi}{2} \leq \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k^2+k+1} \leq 2$$

Exercice 1

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction sinus.
2. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$.

Exercice 2

Calculer :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x-1}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{2x}$

Exercice 3

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$$

(On pourra utiliser un raisonnement par récurrence et on rappelle que $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$*)*