

Feuille d'exercices N°2

Limites, continuité, fonctions usuelles

1. Préciser les domaines de définition et de continuité des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{x^2 - 3\sin x + \ln x}{x^2 + 1}, \quad x \mapsto \frac{\sqrt{x} + \cos x}{x^2 - 3}, \quad x \mapsto \sqrt{2\sin^2 x - 1}, \quad x \mapsto \ln x^2 + 2 \ln x$$

2. Calculer la limite si elle existe : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x+11}{\sqrt{x+2}}$, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$, $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt[3]{\frac{x+3}{x^3+27}}$, $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{x^2}{4-9x^2}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-100}{\sqrt{x^2+100}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-100}{\sqrt{x^2+100}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^{-3} - 2^{-3}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} - \frac{1}{2x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - x - 2}.$$

3. Peut-on prolonger par continuité en a les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}}{(x-2)(x^2+1)}, \quad a = 2,$$

$$f(x) = x^n \sin \frac{1}{x}, \quad a = 0 \text{ pour } n \text{ entier naturel},$$

$$f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right), \quad a = 0,$$

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} E\left(\frac{x}{\beta}\right) \quad a = 0, \alpha, \beta \text{ étant des réels strictement positifs ?}$$

- ✱ 4. Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$.

Peut-on prolonger cette fonction par continuité à droite en 0 ?

Tracer le graphe de f , préciser la demi-tangente en 0 (point d'arrêt).

Étudier la branche infinie.

Utiliser l'étude précédente pour résoudre l'équation $a^b = b^a$, a et b étant deux entiers naturels strictement positifs distincts.

- ✱ 5. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, trouver un $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ de sorte que $|x-1| \leq \eta$ implique $\left| \frac{x+1}{x^2+1} - 1 \right| \leq \varepsilon$.
