

TD N°3

Dérivées - Fonctions trigonométriques

Exercice 1

1. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 :
- a. $f(x) = \sqrt{x}$ b. $f(x) = |x|^3$ c. $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ d. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. La fonction $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable en 0 à droite ?
3. (a) Montrer que $\cos'(x) = -\sin(x)$ sur \mathbb{R} .
 (b) En déduire $\sin'(x) = \cos(x)$ sur \mathbb{R} .
 (c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$.
4. Pour les fonctions suivantes, dire si f est dérivable, si oui sur quel intervalle et donner sa dérivée :
 a. $f = \cotan$ b. $f = \arctan$ c. $f(x) = \frac{\sin(3x)}{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}$ d. $f(x) = \cos(x^2 + 2x + 1)$ e. $f(x) = e^{x^2}$



On admet que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0 et que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Exercice 2

Déterminer : a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin x}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ c. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x^2 - a^2}$ d. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{\tan x - \tan a}$

Exercice 3

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \sin(x^2)e^{-x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

- a. La fonction f est-elle continue en tout point de \mathbb{R} ?
 b. La fonction f est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?
 c. Si oui, la fonction f' est-elle continue sur \mathbb{R} ?

Exercice 4

1. Calculer : a. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ b. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ c. $\arccos(\cos(4\pi))$ d. $\arcsin\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
 e. $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ f. $\arcsin(\sin(8))$ g. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{22}{7}\right)\right)$
2. Expliciter : a. $\sin(\arcsin(x))$ b. $\cos(\arcsin(x))$ c. $\sin(\arctan(x))$
3. Dessiner le graphe de $\arcsin(\sin(x))$.
4. Expliciter de deux manières différentes : $\arcsin x + \arccos x$.
5. (a) Montrer de deux manières différentes que $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$.
 (b) Que dire du cas $x < 0$?