TD N°4

Exercice 1

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch}(nx) + sh(nx)$.

1. Par un calcul direct.
2. Par récurrence.

Exercice 2

Calculer la dérivée n-ème de $f(x) = e^{x \operatorname{sh} a} \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} a)$, où $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Résoudre $4 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x - 4 = 0$.

Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\operatorname{argch}\left(\sqrt{\frac{1 + \operatorname{ch} x}{2}}\right) - \frac{x}{2}$.
2. $\operatorname{argsh}\left(xy + \sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2-1}\right)$.

Exercice 5

Étudier la dérivabilité des fonctions argch, argsh et argth.

Exercice 6

Montrer que argch, argsh et argth peuvent se mettre sous la forme d'un logarithme.

Exercice 7

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2 \arctan(\operatorname{th} x) = \arctan(\operatorname{sh}(2x))$.

Exercice 8

1. Étudier les variations de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1)$.
2. En déduire que $f(x) = \frac{\pi}{2}$ admet une unique solution.

Exercice 9

Comparer les deux nombres e^π et π^e.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell < 0$ alors $\exists A > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x > A \Rightarrow f(x) < 0)$.
2. Supposons que f soit continue et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ finie. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.

Exercice 11

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$.

1. Montrer que si f est continue alors il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = x$.
2. Trouver un contre-exemple si f est discontinue.

Exercice 12

Soit $f(x) = \ln|\ln x|$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. En appliquant le théorème des accroissements finis à f, montrer que $\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln(p)) \leq \dfrac{1}{p \ln p}$.
3. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2\ln 2} + \dfrac{1}{3\ln 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \ln n} \right) = +\infty$.

Exercice 13

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{n}} = 2$.

Exercice 14

1. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.