# Correction du TD n°1

Jean-Baptiste Campesato

Exercices choisis

Il faut connaître par cœur les cosinus et sinus des angles suivants du premier quadrant du cercle unité :

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |

On retrouve ensuite les autres valeurs à connaître (cf TD) à l'aide des formules des angles associés.
On trouve les valeurs de tan en remarquant que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
Les formules des angles associés se retrouvent grâce au schéma réalisé en TD.

**Exercice 3**

Idée générale : trouver une solution particulière $a$ à l'aide du cercle trigonométrique et des formules des angles associés (et ne pas oublier que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$) puis utiliser une des propriétés suivantes selon le cas :

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2n\pi$ ou $x = -a + 2n\pi$ $\quad (n \in \mathbb{Z})$
- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2n\pi$ ou $x = \pi - a + 2n\pi$ $\quad (n \in \mathbb{Z})$
- $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + n\pi$ $\quad (n \in \mathbb{Z})$

Solutions :

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.
- $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.
- Il faut se rappeler que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ : $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, 2\pi\}$.
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{\pi\}$.
- $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.
- $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.
- Pour la solution particulière, annuler tan revient à annuler sin : $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n$ avec $n = \mathbb{Z}$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
- Pour la solution particulière, $\tan x = 1$ revient à chercher $x$ tel que $\sin x = \cos x$ : $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.
- Pour trouver une solution particulière, on peut se baser sur la précédente en observant la parité de tan ($\tan(-x) = -\tan x$) : $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$.
- Pour la solution particulière, on veut faire apparaître du $\sqrt{3}$ au dénominateur (donc regarder pour quels angles cos fait apparaître du $\sqrt{3}$ au numérateur) : $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.
- $\cos x = \frac{3}{2}$ n'a pas de solution (en effet, $-1 \leq \cos x \leq 1$).

**Exercice 4**

1. $\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$ ou $\frac{x}{2} = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{2} + 4\pi n$ ou $x = \frac{7\pi}{2} + 4\pi n$. $\mathscr{S}_{[0,4\pi]} = \left\{\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$.
2. $\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n$. $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}\right\}$.

3. On utilise la formule $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ pour se débarrasser de la puissance de 2 : $\cos(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x)) \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = 2\pi n \Leftrightarrow x = \pi n$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
4. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ou $x = 2\pi n$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.
5. $\cos(kx) = 0 \Leftrightarrow kx = \frac{\pi}{2} + \pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2k} + \frac{\pi}{k}n$.
6. $|\sin(kx)| = 1 \Leftrightarrow \sin(kx) = 1$ ou $\sin(kx) = -1 \Leftrightarrow \dots$
7. $\sin x = \tan x \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow \dots$ (Attention, on ne peut pas diviser par 0. Il ne faut pas oublier de traiter le cas $\sin x = 0$ avant de simplifier).
8. $\sin(2x) + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(x+\pi) \Leftrightarrow 2x = x + \pi + 2n\pi$ ou $2x = -x + 2n\pi \Leftrightarrow x = \pi + 2n\pi$ ou $x = \frac{2n\pi}{3}$. $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\}$.
9. $12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2 \Leftrightarrow 6\cos^2 x - 4(1-\cos^2 x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\cos = -\frac{1}{\sqrt{2}} \dots$

**Exercice 5** : indications

Pour les deux premières questions, exprimer $\cos^2 \frac{\pi}{8}$ (resp. $\sin^2 \frac{\pi}{8}$) en fonction de $\cos \frac{\pi}{4}$ grâce à la formule exprimant $\cos(2x)$ avec $\cos^2 x$ (resp. $\cos(2x)$ avec $\sin^2 x$). Ensuite il faut passer à la racine (en vérifiant que c'est bien positif).
Pour les deux questions suivantes, il faut remarquer que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et utiliser les formules d'addition de cos et de sin.