Algèbre linéaire

Rappels de première année

Toutes les propositions sont des conséquences faciles des définitions et des résultats précédents. Les théorèmes, quant à eux, demandent un peu plus de travail. Le deuxième théorème d'isomorphisme ainsi que les résultats utilisant la notion d'espace quotient ne sont pas à maîtriser, il en va de même pour une grande partie des résultats sur la dualité. Pour les résultats valables en dimension quelconque, on pourra dans un premier temps s'intéresser seulement aux preuves où l'on suppose que les dimensions sont finies. Les preuves non données (et non admises) sont à chercher en exercice.

Table des matières

---

1 Espaces vectoriels

Définition 1.1. On appelle *espace vectoriel* sur un corps commutatif $\mathbb{k}$ tout ensemble E muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe $\mathbb{k} \times E \to E$ telles que :
- $(E, +)$ est un groupe abélien.
- $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{k}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{k}$, $\forall (x, y) \in E^2$, $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
- $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{k}^2$, $\forall x \in E$, $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
- $\forall x \in E$, $1x = x$ (1 est le neutre de la loi multiplicative de $\mathbb{k}$).

On dit qu'un élément de E est un vecteur et qu'un élément de $\mathbb{k}$ est un scalaire.
On dit aussi que E est $\mathbb{k}$-espace vectoriel.

Dans toute la suite $\mathbb{k}$ designe un corps commutatif (on pourra supposer que $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$.

La définition et la proposition suivante nous permettent d'écrire indifféremment $+$ pour la loi de composition interne de E ainsi que pour la loi additive de $\mathbb{k}$. De la même façon, on notera 0 pour le neutre de $(E, +)$ et pour celui de $(\mathbb{k}, +)$. Le contexte permet de préciser de quelle loi et de quel neutre il s'agit.

Proposition 1.2. *On a, pour tous les λ, μ de $\mathbb{k}$ et pour tous les x, y de E :*
- $\lambda x = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0$ *ou* $x = 0)$.
- $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$.
- $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.

2 Sous-espaces vectoriels

Définition 2.1. Une partie $F \subset E$ est un *sous-espace vectoriel* de E sur $\mathbb{k}$ si F est un sous-groupe additif de E et si pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$ et pour tout $x \in F$, on a $\lambda x \in F$.

Remarque 2.2. En restreignant les lois de E à F, il est évident que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$.

Proposition 2.3 (Caractérisation pratique)**.** *Une partie F d'un espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \neq \varnothing$ et $\forall (x, y) \in F^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{k}^2$, $\lambda x + \mu y \in F$.*

Remarque 2.4. Pour satisfaire le premier point, on vérifie généralement que $0 \in F$.

Proposition 2.5. *Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition-Proposition 2.6. Soit A une partie de E. Il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A, on le note $\mathrm{vect}(A)$ ou $< A >$ et on parle du *sous-espace vectoriel engendré* par A. Il s'agit de l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A ou encore de l'ensemble des combinaisons linéaires (voir 3.1) des vecteurs de A.

Remarque 2.7. $\mathrm{vect}(\varnothing) = \{0\}$.

Proposition 2.8. *Soient $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E ($r \geq 2$), alors $\mathrm{vect}(F_1 \cup \dots \cup F_r) = \{x_1 + \dots + x_r,\ x_i \in F_i\}$. On utilisera alors la notation $F_1 + \dots + F_r$.*

Définition-Proposition 2.9. Soient $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout vecteur $x \in F_1 + \dots + F_r$ s'écrit de façon unique $x = x_1 + \dots + x_r$ avec $x_i \in F_i$

(ii) Pour toute famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_r) \in F_1 \times \dots \times F_r$, on a :

$$x_1 + \dots + x_r = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_r = 0$$

(iii) $\forall k \in \{1, ..., r-1\}$, $\left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right) \cap F_{k+1} = \{0\}$

Lorsqu'une famille de sous-espaces vectoriels vérifie les assertions précédentes, on dit qu'elle est en *somme directe* et on note $F_1 + \dots + F_r = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$.

Définition 2.10. Deux sous-espaces vectoriels F et G sont *supplémentaires* si $E = F \oplus G$.

Remarque 2.11. Dans la pratique on vérifie que $E = F + G$ et que $F \cap G = \{0\}$.

Attention 2.12. Il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire ! Dire que F et G sont supplémentaires ne signifie pas que si $x \notin F$ alors $x \in G$, mais signifie que si $x \notin F$ alors sa composante dans G n'est pas nulle.

3 Familles libres, familles génératrices, bases

Définition 3.1. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. Une *combinaison linéaire* des $(x_i)_{i \in I}$ est un vecteur de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ où la famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ est à support fini[†].

Exemple 3.2 (Cas d'une famille finie)**.** Une combinaison linéaire des $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$ est un vecteur de la forme $\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_k x_k$ où $\lambda_i \in \mathbb{k}$.

Définition 3.3. On dit qu'une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est *liée* (ou que les vecteurs x_i sont *linéairement dépendants*) si le vecteur nul peut s'écrire comme combinaison linéaire non triviale des $(x_i)_{i \in I}$.
Cela signifie qu'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ non tous nuls et à support fini telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$.

Proposition 3.4. *Une famille est liée si et seulement si elle admet un élément qui peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.*

Proposition 3.5. *Toute surfamille d'une famille liée est liée.*

[†] ie. seul un nombre fini de λ_i sont non nuls. On note $K^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires indexées par I à supports finis. En algèbre, nous ne considérons que des sommes finies. En effet, quel sens donner à une somme infinie ?

Exemple 3.6 (Cas d'une famille finie)**.** Une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$ est liée si et seulement s'il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Bbbk^k \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0$.

Définition 3.7. On dit qu'une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est *libre* (ou que les vecteurs x_i sont *linéairement indépendants*) si elle n'est pas liée.

Remarque 3.8. Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si $\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$,
$\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0\right)$.

Proposition 3.9. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

Exemple 3.10 (Cas d'une famille finie)**.** Une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$ est libre si et seulement si $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Remarque 3.11. La dépendance linéaire ne dépend pas de l'ordre, on peut donc parler de parties liées et de parties libres : une partie A est libre (resp. liée) si la famille $(x)_{x\in A}$ est libre (resp. liée).

Définition 3.12. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille *génératrice* si elle engendre E (comme partie).

Définition 3.13. Une *base* de E est une famille libre et génératrice.

Définition-Proposition 3.14. Une famille $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ est une base si et seulement si tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$. ie. $\forall x \in E,\ \exists!\,(\lambda_i)_i \in K^{(I)},\ x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.

On dit alors que les $(\lambda_i)_i$ sont les *coordonnées* du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ et que λ_i est la $i^{\text{ème}}$ *composante* de x dans $\mathcal{B}$.

Remarque 3.15. Cette proposition permet d'identifier les coordonnées (dans une base fixée) de deux vecteurs égaux.

Attention 3.16. Cette fois l'ordre est important...

Théorème 3.17 (Théorème de la base incomplète, version forte)**.** *Si G est une famille génératrice et si L est une famille libre, on peut trouver une famille $F \subset G \setminus L$ telle que $L \cup F$ soit une base.*

Admis. ∎

Corollaire 3.18 (Théorème de la base incomplète)**.** *Toute famille libre peut être complétée en une base.*

Corollaire 3.19. *Tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.*

Corollaire 3.20. *Tout espace vectoriel admet une base.*

Attention 3.21. Si E est trivial (ie. $E = \{0\}$), alors $\varnothing$ est *la* base de E.

Attention 3.22. En dimension infinie (voir 5.1), l'existence d'une base est équivalente à l'axiome du choix. En dimension finie, on peut se passer de l'axiome du choix pour démontrer le théorème de la base incomplète.

Corollaire 3.23. *Une famille est une base si et seulement si elle est libre maximale (resp. génératrice minimale).*

4 Applications linéaires

Définition 4.1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\Bbbk$. On appelle *application linéaire* de E dans F toute application $f : E \to F$ telle que

- $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- $\forall \lambda \in \Bbbk,\ \forall x \in E,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, il s'agit d'un sous-espace vectoriel des applications de E dans F.

Remarque 4.2. $f(0) = 0$.

Proposition 4.3 (Caractérisation pratique)**.** *Une application entre $\Bbbk$-espaces vectoriels $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si* $\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \Bbbk^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Définition 4.4. Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même est un *endomorphisme*. On note alors $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

Définition 4.5. Une application linéaire de E dans le corps de base $\Bbbk$ est une *forme linéaire*. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \Bbbk)$ l'ensemble des formes linéaires de E. Nous étudierons les formes linéaires de manière plus générale dans la partie 8.

Proposition 4.6. *La composée de deux applications linéaires (au-dessus d'un même corps) est une application linéaire.*

Définition-Proposition 4.7. Si $f : E \to F$ est une application linéaire bijective, alors f^{-1} est encore une application linéaire. On dit que f est un *isomorphisme* (linéaire) et que E et F sont isomorphes, que l'on note $E \simeq F$.

Définition-Proposition 4.8. Un isomorphisme d'un espace vectoriel dans lui-même est un *automorphisme*. L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E est un groupe pour la composition, on le note $\mathcal{GL}(E)$. †

Proposition 4.9.
- *L'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.*
- *L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.*

Définition 4.10. On nomme *noyau* d'une application linéaire f l'ensemble $\ker f = f^{-1}(0)$. C'est un sous-espace vectoriel par la proposition précédente.

Le résultat suivant est très fort et très utile :

Proposition 4.11. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors f injective* $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$.

Proposition 4.12. *Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est déterminée par l'image d'une base : soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E, soit $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ alors $f(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i)$.*

Définition-Proposition 4.13. Soit E un espace vectoriel sur $\Bbbk$ et F un sous-espace vectoriel, alors la structure de $\Bbbk$-espace vectoriel passe au quotient E/F.

Théorème 4.14 (Premier théorème d'isomorphisme)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $E/\ker f \simeq \operatorname{im} f$.*

Admis. ■

Théorème 4.15 (Deuxième théorème d'isomorphisme)**.** *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E alors $(F + G)/G \simeq F/(F \cap G)$.*

Admis. ■

Définition 4.16. On appelle *projecteur* de E tout endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $p \circ p = p$.

Proposition 4.17. *Si p est un projecteur de E alors $E = \ker p \oplus \operatorname{im} p$. Réciproquement si $E = F \oplus G$ alors l'application $p : E \to E$ qui à un vecteur de E associe sa composante sur G est un projecteur d'image G et de noyau F.*

Remarque 4.18. On dit alors que p est le projecteur (ou la *projection vectorielle*) de E sur $\operatorname{im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Corollaire 4.19. *Si $E = F \oplus G$ alors $E/F \simeq G$ et $E/G \simeq F$.*

Le premier théorème d'isomorphisme appliqué au projecteur de E d'image G et de noyau F donne $E/F \simeq G$. ■

Remarque 4.20. Donc tous les supplémentaires de F dans E sont isomorphes à E/F.

Proposition 4.21. *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$, alors p est la projection vectorielle sur G parallèlement à F si et seulement si l'application $q = \mathrm{Id} - p$ est la projection vectorielle sur F parallèlement à G. On dit que q est le* projecteur associé *à p et on a donc les relations $\operatorname{im} q = \ker p$ et $\ker q = \operatorname{im} p$.*

Définition 4.22. On appelle *symétrie vectorielle* de E tout endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $s \circ s = \mathrm{Id}$. ‡

Proposition 4.23. *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$, alors p est un projecteur si et seulement si $2p - \mathrm{Id}$ est une symétrie vectorielle.*

Corollaire 4.24. *Si s est une symétrie vectorielle de E alors $E = \ker(s-\mathrm{Id}) \oplus \ker(s+\mathrm{Id})$. Réciproquement si $E = F \oplus G$ alors l'application $s : E \to E$ qui à un vecteur $x + y \in F \oplus G$ associe $x - y$ est une symétrie vectorielle vérifiant $\ker(s - \mathrm{Id}) = F$ et $\ker(s + \mathrm{Id}) = G$.*

Remarque 4.25. On dit alors que s est la symétrie de E par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id})$.

† pour *groupe linéaire*
‡ Attention à ne pas confondre avec endomorphisme symétrique.

5 Théorie de la dimension

Définition 5.1. Un espace vectoriel est dit de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

Définition-Proposition 5.2. Toutes les bases de E sont en bijection et on dit que le cardinal d'une base est la *dimension* de E. On note $\dim E$ pour la dimension de E.

Admis. ■

Attention 5.3. La dimension dépend du corps de base. On pourra utiliser la notation $\dim_{\mathbb{k}} E$ s'il y a risque de confusion.

Proposition 5.4. *Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension.*

Pour le premier sens, il suffit de vérifier qu'un isomorphisme envoie une base sur une base.
Pour la réciproque, il suffit de se donner une base pour chaque espace et de définir une application linéaire en envoyant une base sur l'autre. ■

Proposition 5.5. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels, alors $F \subset G \Rightarrow \dim F \leq \dim G$.*

Une base de F est en particulier une famille libre de G, on peut donc la compléter en une base de G. ■

Proposition 5.6. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, alors :*
- *Si F est un sous-espace vectoriel de E et si $\dim E = \dim F$ alors $E = F$.*
- *Si F est un sous-espace vectoriel de E avec $E \simeq F$ alors $E = F$.*

Soit $\mathcal{B}$ une base de F, c'est une famille libre de E maximale (sinon, en la complétant, on aurait une base de cardinal plus grand que la dimension), c'est donc une base de E. ■

Attention 5.7. Le résultat précédent est faux en dimension quelconque : considérer $E = \mathbb{k}[x]$, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots\}$ et $F =< 1, x^2, x^4, \ldots >$.

Définition 5.8. La dimension de l'image d'une application linéaire est notée $\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{im} f)$, et on parle du *rang* de f.

Théorème 5.9 (Théorème du rang). *Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on a $\dim E = \operatorname{rg} f + \dim(\ker f)$.*

Soient $(u_i)_{i\in I}$ une base de $\operatorname{im} f$ et $(v_j)_{j\in J}$ une base de $\ker f$. Soit $(w_i)_{i\in I}$ une famille de E telle que $f(w_i) = u_i$. On va vérifier que $(v_j, w_i)_{j\in J, i\in I}$ est une base de E.
Soit $x \in E$ alors il existe une famille de scalaires $(a_i)_{i\in I}$ à support fini telle que $f(x) = \sum a_i u_i$, d'où $f\left(x - \sum a_i w_i\right) = 0$, ie. $x - \sum a_i w_i \in \ker f$. Ainsi, il existe une famille de scalaire $(b_j)_{j\in J}$ à support fini telle que $x - \sum a_i w_i = \sum b_j v_j$. Donc $x = \sum a_i w_i + \sum b_j v_j$. La famille est donc génératrice.
Supposons qu'il existe deux familles de scalaires $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ à supports finis telles que $\sum a_i w_i + \sum b_j v_j = 0$. En appliquant f, on trouve $0 = \sum a_i u_i$, donc les a_i sont nuls. Puis les b_j sont nuls. Donc la famille est libre. ■

Corollaire 5.10. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{k}$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :*
- *f injective $\Leftrightarrow \operatorname{rg} f = \dim E$.*
- *f surjective $\Leftrightarrow \operatorname{rg} f = \dim F$.*

Si de plus $\dim F = \dim E$ alors :
- *f surjective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f bijective.*

On a même :

Corollaire 5.11. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{k}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- *f inversible à gauche.*
- *f inversible à droite.*
- *f inversible.*
- *f régulier à gauche.*
- *f régulier à droite.*
- *f régulier.*
- *f injectif.*

- *f surjectif.*
- *f bijectif.*

Attention 5.12. Les deux résultats précédents sont faux en dimension quelconque.

Proposition 5.13. *Soient G et F deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E, alors* $\dim E = \dim F + \dim G$.

Le résultat s'obtient en appliquant le théorème du rang au projecteur de E d'image F et de noyau G. ∎

Remarque 5.14. On a donc $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Proposition 5.15. *Tous les supplémentaires d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel ont même dimension.*

En dimension finie, il suffit d'appliquer le résultat précédent.
En dimension quelconque, on a vu que les tous les supplémentaires de F dans E sont isomorphes à E/F. ∎

Proposition 5.16. *Soit F un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel, alors* $\dim(E/F) + \dim F = \dim E$.

On peut appliquer le théorème du rang à la projection canonique $E \to E/F$ ou utiliser les résultats précédents en remarquant que si G est un supplémentaire de E dans F alors $\dim(E) = \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(F) + \dim(E/F)$.

∎

Proposition 5.17. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors on a* $\dim(F+G)+\dim(F\cap G) = \dim F + \dim G$.

Remarque 5.18. L'idée dans la proposition précédente est que la décomposition d'un vecteur de $F + G$ sous la forme $x+y$ avec $x \in F$ et $y \in G$ n'est pas unique, il faut donc enlever la redondance. À comparer avec $\dim(F\oplus G) = \dim F + \dim G$.

D'après le deuxième théorème d'isomorphisme $(F+G)/G \simeq F/(F\cap G)$ et d'après le résultat sur la dimension du quotient $\dim(F+G)+\dim(F\cap G) = \dim((F+G)/G)+\dim(G)+\dim(F\cap G) = \dim(F/(F\cap G))+\dim(G)+\dim(F\cap G) = \dim F + \dim G$. ∎

Proposition 5.19. *Soient $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de dimensions finies et de bases respectives $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $F_1 + \dots + F_r = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$
(ii) *La famille obtenue en concaténant les familles $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ est une famille libre*
(iii) $\dim(F_1 + \dots + F_r) = \dim F_1 + \dots + \dim F_r$

On obtient un nouveau critère de supplémentarité en dimension finie :

Corollaire 5.20. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors deux des trois propositions suivantes impliquent la troisième :*

- $E = F + G$.
- $F \cap G = \{0\}$.
- $\dim E = \dim F + \dim G$.

Dans ce cas $E = F \oplus G$.

Proposition 5.21. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies alors* $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \dim F$.

Attention 5.22. Le résultat précédent est faux en dimension quelconque, comme on le voit avec 8.12.

On déduit de la fin de la partie 3, les résultats suivants en dimension finie (utiles à la résolution des exercices).

Proposition 5.23. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, égale à n. Alors :*

- *Toute famille libre de E est finie et a au plus n éléments.*
- *Toute famille de E ayant au moins $n + 1$ éléments est liée.*
- *Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.*

Proposition 5.24. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, égale à n, et $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors deux des trois propriétés suivantes entrainent la troisième :* [†]

- *$\mathcal{F}$ a n éléments.*
- *$\mathcal{F}$ est libre.*
- *$\mathcal{F}$ est génératrice.*

Définition 5.25. On appelle *rang* d'une famille de vecteurs de E la dimension du sous-espace engendré par cette famille.

[†] Dans les exercices, on utilise fréquemment que si $\mathcal{F}$ est libre et finie avec n éléments alors c'est une base.

6 Calcul matriciel

6.1 Généralités

Le calcul matriciel offre un outil commode pour transcrire des propriétés d'algèbre linéaire en dimension finie par des propriétés sur des tableaux de nombres. Ceci permet de fournir des méthodes calculatoires et algorithmiques en algèbre linéaire. L'idée repose ici sur le fait qu'une application linéaire est déterminée par l'image d'une base (voir 4.12), ce qui nous permettra de la décrire par un tableau de scalaires.
Le calcul matriciel intervient aussi dans d'autres domaines (en algèbre bilinéaire par exemple), mais nous n'en parlerons pas ici.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n. On fixe des bases $\mathcal{B} = (e_j)_{j=1,\ldots,p}$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{i=1,\ldots,n}$ respectivement de E et de F.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $j = 1, \ldots, p$, on peut décomposer $f(e_j)$ dans $\mathcal{C}$: $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\varepsilon_i$.

L'application linéaire f est donc entièrement déterminée par le tableau de scalaires suivant :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}$$

En effet, soit $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ un vecteur de E dans $\mathcal{B}$, alors $f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f\left(e_j\right) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} x_j m_{ij}\varepsilon_i$.

Définition 6.1. Une *matrice* de type $(n, p) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ sur un corps $\Bbbk$ est un tableau de np éléments de $\Bbbk$ disposés en n lignes et p colonnes. On note m_{ij} les termes d'une matrice où i indique la ligne et j la colonne. L'ensemble des matrices de type (n, p) sur $\Bbbk$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$. Si $n = p$, on dit que la matrice est *carrée* est on note $M_n(\Bbbk) = M_{n,n}(\Bbbk)$.

Proposition 6.2. *Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions (finies) respectives p et n sur un corps $\Bbbk$, alors il existe une bijection entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$. En particulier, l'ensemble des endomorphismes $\mathcal{L}(E)$ est en bijection avec $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$. La bijection est donnée, en se fixant des bases, par l'application $f \mapsto \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.*

Cette bijection permet de transposer les lois de composition de $\mathcal{L}(E, F)$ à $\mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$:

Définition-Proposition 6.3. On considère la loi de composition interne $+$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$ donnée par $(a_{ij})_{ij} + (b_{ij})_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})_{ij}$ et la loi de composition externe $\Bbbk \times \mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk) \to \mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$ donnée par $\lambda(a_{ij})_{ij} = (\lambda a_{ij})_{ij}$. Sous forme de tableaux cela donne : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}$ et
$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$.
On obtient alors que $\mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$ est un espace vectoriel de dimension np sur $\Bbbk$.
Une base canonique est donnée par les matrices $(E_{kl})_{kl}$ où $E_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{ij}$. [†]
Il est évident que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f + g) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$ et que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f) = \lambda \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

La composition de deux applications linéaires définit une multiplication :

Définition-Proposition 6.4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\Bbbk)$, on définit alors $AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\Bbbk)$

[†] δ est le symbole de Kronecker : $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Ainsi E_{ij} est la matrice ayant 1 en (i, j) et 0 ailleurs.

par $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$. Schématiquement, on a :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & \vdots & \\ \vdots & b_{kj} & \vdots \\ & \vdots & \\ & b_{pj} & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} & & \cdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip} \\ & & \cdots & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Si E, F, G sont trois espaces vectoriels de dimensions finies sur $\Bbbk$ avec respectivement des bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ et si on a $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Attention 6.5. Comme pour la composition il faut se méfier : tout d'abord il faut que les matrices soient sur le même corps, puis, de la même façon que l'espace d'arrivée de f soit l'espace de départ de g, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B et alors le nombre de lignes de AB est celui de A et le nombre de colonnes est celui de B.

Proposition 6.6.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$, $\forall B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\Bbbk)$, $A(B + C) = AB + AC$.
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$, $\forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\Bbbk)$, $(A + B)C = AC + BC$.
- $\forall \lambda \in \Bbbk$, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\Bbbk)$, $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\Bbbk)$, $\forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\Bbbk)$, $(AB)C = A(BC)$.

On peut donc d'écrire ABC et λAB sans risque de confusion.

Notation 6.7. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\Bbbk$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On représente alors tout vecteur x de E par une matrice colonne donnée par les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$: si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\Bbbk)$.

Proposition 6.8. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies sur $\Bbbk$ munis respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, alors* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

En considérant les matrices comme des applications linéaires, on obtient les définitions suivantes :

Définition 6.9. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$.
- On appelle *noyau* de A le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\Bbbk)$ défini par $\ker A = \{x \in \mathcal{M}_{p,1}(\Bbbk),\ Ax = 0\}$.
- On appelle *image* de A le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\Bbbk)$ défini par $\mathrm{im}\, A = \{Ax,\ x \in \mathcal{M}_{p,1}(\Bbbk)\}$.

Proposition 6.10. *Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies sur $\Bbbk$, p et n respectivement, munis de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ respectivement, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors en identifiant E avec $\mathcal{M}_{p,1}(\Bbbk)$ et F avec $\mathcal{M}_{n,1}(\Bbbk)$, on a* $\ker f = \ker(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))$ *et* $\mathrm{im}\, f = \mathrm{im}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))$.

Corollaire 6.11. *Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$, alors $p = \dim(\ker M) + \mathrm{rg}(M)$ où le rang est la dimension de l'image.*

D'après le théorème du rang et la proposition précédente : $p = \dim E = \dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\ker M) + \mathrm{rg}(M)$. ■

6.2 Matrices carrées

Proposition 6.12. $(\mathcal{M}_n(\Bbbk), +, \cdot, \times)$ *est une $\Bbbk$-algèbre associative et unitaire et* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ *est un isomorphisme de $\Bbbk$-algèbres unitaires.*

On note $\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{ij}$ *le neutre de la multiplication : on parle de la matrice* identité *(ou* unité*).*

Définition 6.13. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ est dite *inversible* s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ telle que $AB = BA = \mathrm{I}_n$.
On note $B = A^{-1}$ et on dit que A^{-1} est l'*inverse* de A.
On note $\mathcal{GL}_n(\Bbbk)$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$.

Définition-Proposition 6.14. Le produit de deux matrices carrées inversibles d'ordre n est inversible et $\mathcal{GL}_n(\Bbbk)$ est un groupe, nommé *groupe linéaire*.
L'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{GL}(E) \to \mathcal{GL}_n(\Bbbk)$ est un isomorphisme de groupes.

Proposition 6.15. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ une matrice et f un endomorphisme représenté par A alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *f est un isomorphisme.*
- *A est inversible à gauche.*
- *A est inversible à droite.*
- *A est inversible.*
- *A est régulière à gauche.*
- *A est régulière à droite.*
- *A est régulière.*

Méthode 6.16 (Calcul de l'inverse d'une matrice)**.** Soient $x, y \in \mathcal{M}_{n,1}(\Bbbk)$, alors si $A \in \mathcal{GL}_n(\Bbbk)$, $Ax = y \Leftrightarrow x = A^{-1}y$. Donc pour calculer A^{-1}, il suffit de résoudre le système $Ax = y$ (d'inconnue x pour un y générique). On obtient alors un système de la forme $\begin{cases} x_1 &= a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \\ & \vdots \\ x_i &= a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n \\ & \vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$ et $A^{-1} = (a_{ij})_{ij}$.
Nous donnerons plus bas un algorithme par élimination (de Gauss-Jordan) lorsque nous traiterons plus généralement de la résolution de systèmes.

Définition 6.17. On définit, pour toute matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$, la trace de A par $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Proposition 6.18. *L'application* $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\Bbbk) \to \Bbbk$ *est une forme linéaire.*

Proposition 6.19. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk), \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\Bbbk), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

6.3 Changement de bases

Définition 6.20. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\Bbbk$ et $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases de E.
On appelle *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ la matrice $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ dont les colonnes sont les coordonnées des éléments de $\mathcal{C}$ décomposés dans $\mathcal{B}$.

Proposition 6.21.

- $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$.
- $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,\mathrm{P}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$.
- $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \mathrm{I}_n$.
- $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \in \mathcal{GL}_n(\Bbbk)$ *et* $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = \mathrm{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

Proposition 6.22.

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(x)$.
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = \mathrm{P}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Remarque 6.23 (Cas des endomorphismes)**.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Définition 6.24. Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$ sont dites *équivalentes* s'il existe $P \in \mathcal{GL}_p(\Bbbk)$ et $Q \in \mathcal{GL}_n(\Bbbk)$ telles que $B = Q^{-1}AP$.
Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $M_{n,p}(\Bbbk)$.

Définition 6.25. Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ sont dites *semblables* s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\Bbbk)$ telle que $B = P^{-1}AP$.
Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $M_n(\Bbbk)$.

Proposition 6.26. *Deux matrices carrées semblables ont la même trace.*

6.4 Rang et opérations élémentaires

En identifiant les matrices comme des applications linéaires, on obtient la notion de rang d'une matrice :

Définition-Proposition 6.27. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$. Tous les nombres suivants sont égaux et on parle du *rang* de A, noté $\operatorname{rg} A$:

- Le rang de la famille des colonnes de A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{k})$.
- Le rang de la famille des lignes de A dans $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{k})$.
- L'ordre r des plus grandes matrices carrées inversibles $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{k})$ extraites de A.
- La dimension de l'image de A.
- La dimension de l'image de toute application linéaire qui peut être représentée par A.

Corollaire 6.28. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$. Alors $\operatorname{rg}({}^tA) = \operatorname{rg}(A)$.* [†]

Proposition 6.29. *Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{k}$, p et n respectivement, munis de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ respectivement, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))$.*

Proposition 6.30. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$, $\operatorname{rg}(A) \leq \min(n,p)$.

Il s'agit du rang de la famille des colonnes donc $\operatorname{rg}(A) \leq p$ et du rang de la famille des lignes donc $\operatorname{rg}(A) \leq n$. ■

Proposition 6.31. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$, $\big(\operatorname{rg}(A) = n \Leftrightarrow A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{k})\big)$.

Proposition 6.32.

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$, $\forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{k})$, $\operatorname{rg}(PA) = \operatorname{rg}(A)$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$, $\forall Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{k})$, $\operatorname{rg}(AQ) = \operatorname{rg}(A)$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$, $\forall P \in \operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{k})$, $\forall Q \in \operatorname{Mat}_{p,q}(\mathbb{k})$, $\operatorname{rg}(PAQ) \leq \operatorname{rg}(A)$.

- $\operatorname{im}(AP) \subset \operatorname{im}(A) \Rightarrow \operatorname{rg}(AP) \leq \operatorname{rg}(A)$. De même, $\operatorname{im}(A) = \operatorname{im}(APP^{-1}) \subset \operatorname{im}(AP) \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(AP)$.
- $\ker(A) \subset \ker(QA) \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \geq \operatorname{rg}(QA)$ d'après le théorème du rang. De même, $\ker(QA) \subset \ker(Q^{-1}QA) = \ker(A) \Rightarrow \operatorname{rg}(QA) \geq \operatorname{rg}(A)$.
- Similaire. ■

Proposition 6.33. *Deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{k})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

On va montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$ de rang r est équivalente à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire représentée par A (pour des bases données). D'après le théorème du rang, $\ker f$ est de dimension $p-r$ et admet une base $(e_{r+1},\dots,e_p)$ que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ de E. Soit $f_i = f(e_i)$ pour $i = 1,\dots,r$. On vérifie que la famille (f_i) est libre (si $\sum \lambda_i f_i = 0$ alors $\sum \lambda_i e_i$ est dans $\ker f \cap \operatorname{vect}(e_1,\dots,e_r) = \{0\}$) et on la complète en une base $\mathcal{C} = (f_1,\dots,f_n)$ de F. Alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ■

Définition 6.34. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$. On appelle opérations élémentaires sur les colonnes de A, les transformations suivantes, où C_j désigne la j-ème colonne :

- Échange entre deux colonnes C_j et C_k, noté $C_j \leftrightarrow C_k$.
- Remplacement de la colonne C_j par λC_j, où $\lambda \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$, noté $C_j \leftarrow \lambda C_j$.
- Remplacement de la colonne C_j par $C_j + \lambda C_k$, où $\lambda \in \mathbb{k}$, noté $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$.

De la même façon, on définit les opérations élémentaires sur les lignes de A.

Proposition 6.35. *Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) de A s'obtiennent en multipliant A à droite (resp. gauche) par une matrice inversible.*

Corollaire 6.36. *Les opérations élémentaires ne changent pas le rang.*

On combine 6.32 et 6.35. ■

On en déduit l'algorithme suivant utilisant les opérations élémentaires pour transformer une matrice de sorte à en déduire facilement le rang :

Méthode 6.37 (Algorithme d'élimination de Gauss-Jordan pour calculer le rang d'une matrice)**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$. On réalise les opérations suivantes où a_{ij}^k désignent les coordonnées de la matrice lors de la k-ème itération et L_i^k la i-ème ligne de la matrice lors de la k-ème itération :

[†] Où ${}^tA$ désigne la transposée de A. C'est-à-dire ${}^tA = (a_{ji})_{ij} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k})$ où $A = (a_{ij})$.

```
Si n > p
    remplacer A par ᵗA
Fin si
Pour k allant de 1 à n faire
    S'il existe i ≥ k tel que a_{ik}^{k-1} ≠ 0
        L_k^{k-1} ↔ L_i^{k-1}
        L_k^k ← (1/a_{kk}^{k-1}) L_k^{k-1}
        Pour i allant de 1 à n avec i ≠ k
            L_i^k ← L_i^{k-1} - a_{ik}^{k-1} L_k^k
        Fin pour
    Fin si
Fin pour
```

Après la k-ème itération, tous les coefficients de la colonne k sont nuls sauf celui de la diagonale qui vaut 1.
On peut améliorer l'algorithme en prenant le plus grand (en valeur absolue) a_{ik}^{k-1}. On peut aussi jouer sur les colonnes pour simplifier les calculs.

Remarque 6.38. Comme on le verra plus tard, cet algorithme permet aussi de résoudre des systèmes linéaires et d'inverser des matrices.

7 Systèmes linéaires

Définition 7.1. Un *système linéaire* (sur $\mathbb{k}$) de n équations à p inconnues est un système de la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

d'inconnues $x_1, \ldots, x_p$ avec $a_{ij}, b_i \in \mathbb{k}$.

Proposition 7.2. *Un système linéaire est équivalent à une équation matricielle de la forme $Ax = b$ d'inconnue x avec* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. *On parle alors du système linéaire de matrice A et de second membre b.*

Définition 7.3. Un système linéaire est dit *homogène* si $\forall i,\ b_i = 0$.

Proposition 7.4. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues sur $\mathbb{k}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{k}^p$ de dimension $p - r$ où r est le rang du système.*

Il s'agit du noyau d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$ de rang r : on applique le théorème du rang. ■

Remarque 7.5. Le vecteur nul est toujours solution d'un système linéaire homogène.

Proposition 7.6. *Considérons un système linéaire de n équations à p inconnues sous sa forme matricielle $Ax = b$. On considère la matrice augmentée $(A|b)$.*

- *Le système linéaire n'admet pas de solution si et seulement si* $\operatorname{rg}(A|b) > \operatorname{rg} A$. †
- *Le système linéaire admet au moins une solution si et seulement si* $\operatorname{rg}(A|b) = \operatorname{rg} A$, *dans ce cas l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de $\mathbb{k}^p$ dont la direction est donnée par l'espace des solutions du système homogène associé* ‡. *En particulier, d'après la proposition 7.4, si* $\operatorname{rg} A = p$, *alors le système admet une unique solution.*

Remarquer que $Ax = x_1C_1 + \cdots + x_pC_p$. ■

Remarque 7.7. Si un système linéaire admet des solutions, on obtient donc la solution générale en faisant la somme de la solution générale du système homogène associé et d'une solution particulière.

Remarque 7.8. Si $n = p$ et si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{k})$, alors le système admet une unique solution.

† Dans ce cas, on a forcément que $\operatorname{rg}(A|b) = \operatorname{rg} A + 1$.
‡ Le système homogène associé à un système linéaire est le système linéaire homogène obtenu en remplaçant le second membre par 0.

Définition-Proposition 7.9. En réalisant une *opération élémentaire*, on obtient un système équivalent :

- Échange entre deux lignes L_j et L_k, noté $L_j \leftrightarrow L_k$.
- Remplacement de la ligne L_j par λL_j, où $\lambda \in \Bbbk \setminus \{0\}$, noté $L_j \leftarrow \lambda L_j$.
- Remplacement de la ligne L_j par $L_j + \lambda L_k$, où $\lambda \in \Bbbk$, noté $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_k$.

Attention 7.10. Il n'est pas question, ici, de réaliser des opérations sur les colonnes.

Le résultat précédent va nous permettre de donner un algorithme, similaire à celui de Gauss-Jordan déjà rencontré, pour la résolution d'un système linéaire.

Méthode 7.11 (Algorithme d'élimination de Gauss-Jordan pour résoudre un système)**.**
Considérons un système à n équations et p inconnues. On réalise les opérations suivantes où L_i^k est la i-ème ligne lors de la k-ème itération. On travaille soit sous la forme d'un système, soit sous la forme d'une matrice augmentée $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$:

Pour k allant de 1 à $\min(n,p)$ faire
    S'il existe $i \geq k$ tel que $a_{ik}^{k-1} \neq 0$
        $L_k^{k-1} \leftrightarrow L_i^{k-1}$
        $L_k^k \leftarrow \frac{1}{a_{kk}^{k-1}} L_k^{k-1}$
        Pour i allant de 1 à n avec $i \neq k$
            $L_i^k \leftarrow L_i^{k-1} - a_{ik}^{k-1} L_k^k$
        Fin pour
    Fin si
Fin pour

Remarque 7.12. Sous forme d'un système, on peut aussi se ramener à un système triangulaire en remplaçant `Pour` i `allant de` 1 `à` n `avec` $i \neq k$ par `Pour` i `allant de` $k+1$ `à` n.

Remarque 7.13. Calculer le noyau d'une matrice A revient à résoudre $Ax = 0$.

Méthode 7.14 (Algorithme d'élimination de Gauss-Jordan pour inverser une matrice)**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$. Nous avons vu qu'inverser une matrice revient à exprimer x en fonction de y en partant de $Ax = y$. On peut donc appliquer l'algorithme suivant à la matrice augmentée $\left(A \middle| I_n\right)$:

Pour k allant de 1 à n faire
    S'il existe $i \geq k$ tel que $a_{ik}^{k-1} \neq 0$
        $L_k^{k-1} \leftrightarrow L_i^{k-1}$
        $L_k^k \leftarrow \frac{1}{a_{kk}^{k-1}} L_k^{k-1}$
        Pour i allant de 1 à n avec $i \neq k$
            $L_i^k \leftarrow L_i^{k-1} - a_{ik}^{k-1} L_k^k$
        Fin pour
    Sinon la matrice n'est pas inversible
Fin pour

L'algorithme retourne $\left(I_n \middle| A^{-1}\right)$ si la matrice est inversible.

8 Dualité

Définition 8.1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\Bbbk$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle *transposée* de f l'application ${}^t f : F^* \to E^*$ définie par ${}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$.

Proposition 8.2.

- *${}^t f : F^* \to E^*$ est linéaire.*
- *${}^t : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(F^*, E^*)$ est linéaire.*
- *${}^t(f \circ g) = {}^t g \circ {}^t f$.*

Proposition 8.3.

- $\ker({}^t f) = \{\varphi \in F^*, \forall x \in \operatorname{im} f,\ \varphi(x) = 0\}$.

- $\operatorname{im}({}^t f) = \{\varphi \in E^*, \forall x \in \ker f,\ \varphi(x) = 0\}$.

Proposition 8.4.
- *f injective $\Leftrightarrow {}^t f$ surjective.*
- *f surjective $\Leftrightarrow {}^t f$ injective.*
- *$f \in \mathcal{GL}(E) \Leftrightarrow {}^t f \in \mathcal{GL}(E^*)$.*

Définition-Proposition 8.5. Si E est de dimension finie sur $\mathbb{k}$ et si $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,\dots,n}$ est une base sur $\mathbb{k}$, alors $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{i=1,\dots,n}$ est une base de E^* sur $\mathbb{k}$ où $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. On la nomme *base duale*. En particulier, si E est de dimension finie alors $\dim E = \dim E^*$.

Remarque 8.6. Si E est de dimension quelconque, alors les e_i^* forment toujours une famille libre, mais comme on va le voir, en dimension infinie ce n'est pas une base.

Définition 8.7. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$, on appelle *transposée* de A la matrice ${}^tA = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k})$.

Proposition 8.8. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{k}$ et admettant respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors $\forall f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}({}^t f) = {}^t \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.*

Corollaire 8.9.
- *${}^{tt}A = A$.*
- *${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$.*
- *${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B$.*
- *${}^t(AB) = {}^t B {}^tA$.*
- *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$, alors ($A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{k}) \Leftrightarrow {}^t A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{k})$) et ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.*

Théorème 8.10 (Théorème d'Erdös-Kaplansky)**.** *Si E est un espace vectoriel de dimension infinie et s'il existe une base indexée par I alors $\dim(E^*) = \operatorname{card}(\mathbb{k}^I)$.*

| Admis. ■

En remarquant qu'en dimension infinie $E^* \simeq \mathbb{k}^I$ ($\Rightarrow \operatorname{card}(E^*) = \operatorname{card}(\mathbb{k}^I)$), on peut reformuler le théorème :

Théorème 8.11 (Théorème d'Erdös-Kaplansky)**.** *Si E est un espace vectoriel de dimension infinie alors $\dim(E^*) = \operatorname{card}(E^*)$.*

| Admis. ■

En appliquant le théorème de Cantor, on en déduit le résultat suivant :

Corollaire 8.12. *Si E est de dimension infinie alors E et E^* ne sont jamais isomorphes et $\dim(E^*) > \dim E$.*

| Admis. ■