Departement of Mathematics
Faculty of Science
Saitama University
255 Shimo-Okubo, Sakura-ku, Saitama City 338-8570 Japan
+81 48 858 4973
priziac.fabien@gmail.com

Fabien Priziac

Études supérieures

2013-2014 **Post-doctorat**, *Université de Saitama (Japon)*.
Post-doctorat effectué sous la direction de Toshizumi Fukui et financé par une bourse JSPS (JSPS Postdoctoral Fellowship short-term)

2009-2012 **Doctorat Mathématiques et applications**, *Université de Rennes 1*.
Thèse intitulée “Filtration par le poids équivariante pour les variétés algébriques réelles avec action”, effectuée sous la direction de Goulwen Fichou, rapportée par Ilia Itenberg et Clint McCrory et soutenue le 28 novembre 2012, devant un jury composé de Michel Coste (président du jury), Ilia Itenberg, Georges Comte, Johannes Huisman, Frédéric Mangolte et Goulwen Fichou

2009 **Admission à l’Agrégation externe de Mathématiques**.
rang 217

2005-2009 **Master Mathématiques et applications**, *Université de Bretagne Occidentale*, Brest.
Licence 3, Master, ainsi que Préparation à l’Agrégation effectués à l’UBO

2003-2005 **MPSI-MP**, *Lycée Kerichen*, Brest.

Expériences professionnelles

2012-2013 **Attaché Temporaire d’Enseignement et de Recherche**, *Université de Bretagne Occidentale*, Brest.
Rattaché au laboratoire LMBA (UMR 6205 du CNRS)
96h d’enseignements

2009-2012 **Doctorant contractuel**, *Université de Rennes 1*, Rennes.
Rattaché au laboratoire IRMAR (UMR 6625 du CNRS)
Missions d’enseignement : 192h sur 3 ans

Langues

Anglais **courant**
Espagnol **notions**
Japonais **intermédiaire** *obtention du JLPT 3 en 2009, du JLPT 2 en 2010*

Informatique

Connaissances en Maple, Matlab
Maîtrise de LaTeX

Activités d'enseignement

2012-2013

- Tutorat d'Analyse 1 en L1 Mathématiques (6h).
- Tutorat d'Algèbre et Géométrie en L1 MASS (6h).
- Compléments d'Analyse en L1 Parcours Mathématiques Renforcées et Concours (24h).
- TD d'Analyse appliquée pour la physique en L2 Physique (30h).
- TD de Mathématiques en L1 STU (18h).
- Colles en L1 PMRC, *Université de Bretagne Occidentale*, Brest.

2011-2012

- TD d'Anneaux et Arithmétique en L3 Mathématiques (24h).
- 1/2 TD d'Algèbre Linéaire 2 en L2 MIEE (18h).
- TD de Théorie des Groupes et Géométrie en M1 Mathématiques (24h), *Université de Rennes 1*, Rennes.

2010-2011

- TD d'Anneaux et Arithmétique en L3 Mathématiques (24h).
- 1/2 TD d'Algèbre Linéaire 2 en L2 MIEE (18h).
- TD de Théorie des Groupes et Géométrie en M1 Mathématiques (24h), *Université de Rennes 1*, Rennes.

2009-2010

- TD d'Anneaux et Arithmétique en L3 Mathématiques (24h).
- Cours/TD de Mathématiques pour la Biologie en L1 SVE (30h eq. TD).
- 1/2 TD d'Outils Mathématiques pour la Physique en L1 SPM (12h), *Université de Rennes 1*, Rennes.

Elaboration et participation à l'élaboration de sujets de contrôles continus et d'examens.

Formations suivies liées aux techniques d'enseignements, dispensées en partie par des formateurs de l'IUFM de Bretagne.

Activités de recherche

2013 **Classé 6$^{\text{ème}}$ au concours de recrutement MCF section 25 de l'Université d'Aix-Marseille**.

2012 **Qualification CNU section 25**.

Membre de

depuis 2013 **GDRI Singularités**.

depuis 2012 **GDR Géométrie Algébrique et Géométrie Complexe**.

depuis 2009 **GDR Singularités et Applications**.

Thèmes de recherche

Géométrie algébrique réelle, singularités, topologie algébrique, théorie de Hodge, filtration par le poids, actions de groupes, cohomologie de groupe, orbifolds, classification des germes analytiques réels/Nash, équivalence analytique/Nash après éclatements, fonctions zêta.

Publication

2013 **Complexe de poids des variétés algébriques réelles avec action**, *Mathematische Zeitschrift, doi :10.1007/s00209-013-1244-8.*

Articles soumis

2014 **Equivariant zeta functions for invariant Nash germs**, *prépublication, soumis, disponible sur arXiv (arXiv : 1403.1020).*

2014 **Cohomology and products of real weight filtrations**, *avec Thierry Limoges, prépublication, soumis, disponible sur arXiv (arXiv : 1403.0706).*

2013 **Equivariant weight filtration for real algebraic varieties with action**, *prépublication, soumis, disponible sur arXiv (arXiv : 1303.3031).*

Thèse

2012 **Filtration par le poids équivariante pour les variétés algébriques réelles avec action**, *Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1.*

Exposés

Séminaires

2013 **“Equivariant zeta functions and equivariant blow-Nash equivalence”**.

- Séminaire de Géométrie du Département de Mathématiques, *Université de Saitama, Japon*, 31/10/13.

“Filtration par le poids pour les variétés algébriques réelles et action de groupe”.

- Séminaire de Géométrie du LAMA, *Université de Savoie, Chambéry*, 15/03/13.

2012 **“Filtration par le poids pour les variétés algébriques réelles et action de groupe”**.

- Séminaire de Géométrie Algébrique du LAREMA, *Université d’Angers*, 19/10/12.
- Séminaire de Singularités du LATP, *Université d’Aix-Marseille, Marseille*, 11/10/12.
- Séminaire de Géométrie et Topologie du LMBA, *Université de Bretagne Occidentale, Brest*, 28/09/12.

“Suites spectrales et homologie équivariante”.

- Séminaire Pampers des jeunes chercheurs en géométrie, *Université de Rennes 1*, 17/01/12.

2011 **“Filtration par le poids équivariante pour les variétés algébriques avec action de groupe”**.

- Séminaire interne de géométrie du laboratoire IRMAR, *Université de Rennes 1*, 06/04/11.

“Filtration par le poids pour les variétés algébriques réelles”.

- Séminaire Pampers des jeunes chercheurs en géométrie, *Université de Rennes 1*, 13/01/11.

2010 **Exposés au séminaire organisé par Toshizumi Fukui**, *Université de Saitama, Japon*, 06/2010 - 08/2010.

2009 **“Le groupe de Grothendieck des variété algébriques”**.

- Séminaire Pampers des jeunes chercheurs en géométrie, *Université de Rennes 1*, 07/10/09.

Conférences

2014 **“Equivariant blow-Nash equivalence and equivariant zeta functions for invariant Nash germs”**.

- Rencontre organisée par Satoshi Koike autour du thème des singularités, *Kobe, Japon*, 07/03/2014.

2013 **“Weight filtration for real algebraic varieties and group action”**.

• 1er Symposium Franco-Japonais-Vietnamien sur les Singularités du GDRI Singularités, *Nice*, 18/09/13.

2012 **“Splitting of Nash manifolds with involutions, and additive invariants for real algebraic varieties with involutions”**.

• Mini-workshop “Topology of Real Singularities and Motivic Aspects”, *MFO, Oberwolfach, Allemagne*, 02/10/12.

“Group actions on the Nash constructible filtration”.

• Workshop “Additive Invariants in Real Algebraic and Analytic Geometry”, *Nice*, 12/04/12.

2010 **Exposé lors de la rencontre organisée par Masahiro Shiota à l’Université de Nagoya, Japon**, *26/08/10*.

Groupes de travail

2012 **“Fonctions Nash-constructibles et ensembles symétriques par arcs”**.

• Groupe de travail “Ensembles symétriques par arcs et fonctions analytiques par arcs”, *Université de Rennes 1*.

2011 **“Théorème d’Artin-Mazur et conséquences”**.

• Groupe de travail “Autour des fonctions de Nash”, *Université de Rennes 1*.

Conférences

2013 **Workshop “Theory of singularities of smooth mappings and around it”**, *RIMS, Kyoto, Japon*, 25 - 29/11/2013.

1er Symposium Franco-Japonais-Vietnamien sur les Singularités du GDRI Singularités, *Nice*, 16 - 21/09/13.

Journée “Géométrie et Topologie” du LMBA, Deuxième journée de rencontre de l’équipe “Géométrie et Topologie” du LMBA, *Quimper*, 18/01/13.

2012 **“Characteristic Classes”, Rencontre 2012 du GDR Singularités et Applications**, *Porquerolles*, 22 - 26/10/12.

Mini-workshop “Topology of Real Singularities and Motivic Aspects”, *MFO, Oberwolfach, Allemagne*, 30/09/12 - 6/10/12.

Workshop “Additive Invariants in Real Algebraic and Analytic Geometry”, *Nice*, 11 - 13/04/12.

2011 **Resolution of Singularities and Related Topics**, *Tordesillas, Espagne*, 18 - 23/09/11.

Real Algebraic Geometry, *Rennes*, 20 - 24/06/11.
participation à l'organisation

2010 **Conférence sur les Singularités des Applications Différentiables**, *Nihon Daigaku, Tokyo, Japon*, 20 - 21/07/10.

2009 **Real Singularities in Analysis and Geometry**, *Rennes*, 26 - 30/10/09.

Séjours

2010 **Séjour à l'Université de Nice Sophia-Antipolis, sur l'invitation d'Adam Parusiński et Thierry Limoges**, *18 - 22/10/10.*

Séjour à l'Université de Saitama au Japon, sur l'invitation de Toshizumi Fukui, *15/06/10 - 28/08/10.*
Financé par une bourse JSPS Summer Program

Vulgarisation

2011 **Participation à la Fête de la Science sur le stand des mathématiques**, *Rennes*, 16/10/11.

Travaux de recherche

Thèmes de recherche : Géométrie algébrique réelle, singularités, topologie algébrique, théorie de Hodge, filtration par le poids, actions de groupes, cohomologie de groupe, orbifolds, classification des germes analytiques réels/Nash, équivalence analytique/Nash après éclatements, fonctions zêta.

Travaux effectués pendant le doctorat

1. Contexte

1.1. Singularités en géométrie algébrique réelle

Parmi les **variétés algébriques** ou **analytiques**, l'intérêt porté aux **variétés singulières** est à la base d'une étude en intense activité. Les singularités bloquent l'application de techniques spécifiques aux objets lisses, contraignant les géomètres à développer des méthodes inédites. L'une des découvertes fondamentales dans ce domaine a été le théorème de **résolution des singularités** de H. Hironaka [10]. Ce résultat nous dit qu'il est possible, en éclatant un nombre suffisant de fois une variété singulière le long de centres lisses, d'obtenir un morphisme entre une variété lisse et la variété de départ, qui est un isomorphisme en dehors des singularités de celle-ci. Dans ma thèse intitulée **"Filtration par le poids équivariante pour les variétés algébriques réellles avec action"** et dirigée par Goulwen Fichou, maître de conférences habilité à l'Université de Rennes 1, la résolution des singularités est également très fortement utilisée pour comprendre des propriétés géométriques d'objets singuliers à partir de celles d'objets lisses.

A l'intérieur de ce champ de recherche, la **géométrie algébrique réelle** revêt un statut particulier. L'absence du caractère algébriquement clos du corps des réels force les géomètres réels, et en particulier les singularistes réels, à inventer des techniques originales, propres aux spécificités de ces **variétés algébriques réelles**, et en particulier de celles qui sont **singulières**. En effet, s'intercalant entre la catégorie des **variétés algébriques complexes** et celle des **variétés analytiques réelles**, la catégorie des variétés algébriques réelles hérite d'une certaine flexibilité de la seconde tout en conservant suffisamment de rigidité.

1.2. La filtration par le poids pour les variétés algébriques réelles

En 1974, P. Deligne a établi dans [4] l'existence d'une **filtration** dite **par le poids**, fonctorielle, sur la cohomologie rationnelle à supports compacts des **variétés algébriques complexes**, induite par une **structure de Hodge Mixte**. Cette filtration par le poids vérifie des conditions dites de "**pureté**" (trivialité de la filtration sur les variétés lisses compactes), d'"**additivité**" (compatibilité de la suite exacte longue de cohomologie induite par une inclusion fermée avec la filtration par le poids) et d'"**acyclicité**" (compatibilité de la suite exacte longue de cohomologie induite par une résolution des singularités avec la filtration par le poids). Cet outil nous permet, en combinant ces trois propriétés, de comprendre la **géométrie** de variétés algébriques complexes **singulières** ou **non compactes** à partir de la topologie de variétés lisses compactes (via **compactifications** et **résolutions des singularités**).

Dans ce même objectif mais empruntant une autre voie (le monde réel ne possédant pas de structure analogue à la structure de Hodge mixte), B. Totaro a introduit en 2002 dans [26] un analogue de cette **filtration par le poids** pour **les variétés algébriques réelles** sur l'homologie de Borel-Moore (duale de la cohomologie à supports compacts) de l'ensemble des points réels des variétés algébriques réelles, à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ (afin que toutes les variétés aient une orientation). Des **différences** apparaissent avec la filtration par le poids complexe, notamment le fait que les conditions de pureté, d'additivité et d'acyclicité se lisent ici sur chaque ligne du terme E^2 de la **suite spectrale** associée (on peut ainsi exprimer la suite spectrale de poids de variétés **singulières** ou

non compactes en fonction de l'homologie de variétés lisses compactes), dont on peut extraire en particulier des **invariants additifs**, les **nombres de Betti virtuels**. Pour tout entier naturel q, le q-ième nombre de Betti virtuel β_q est l'unique invariant additif sur les variétés algébriques réelles qui coïncide avec le nombre de Betti d'indice q sur les variétés lisses compactes.

Ce sont C.McCrory et A. Parusiński, dans leur article [19] publié en 2011, qui ont remarqué ce fait et qui, plus généralement, ont mis en évidence la richesse des informations détenues par la **suite spectrale de poids**. Plus encore, ils enrichissent la **compréhension géométrique** de la suite spectrale de poids (et incidemment de la filtration par le poids) en la **réalisant** via un **complexe de chaînes filtré** fonctoriel $\mathcal{N}C_*$ (unique à quasi-isomorphisme filtré près avec des propriétés de pureté, d'additivité et d'acyclicité). Pour X une variété algébrique réelle et k un entier naturel, les chaînes de $C_k(X)$ sont engendrées sur $\mathbb{Z}_2$ par les sous-ensembles **semi-algébriques** (i.e. définis par des inégalités polynomiales à coefficients réels) fermés de dimension k de $X(\mathbb{R})$. La filtration $\mathcal{N}$, dite **géométrique** ou **Nash-constructible**, peut être définie soit via des **résolutions des singularités** soit en utilisant des **fonctions Nash-constructibles** ([17]) et filtre les chaînes semi-algébriques fermées par rapport à un certain degré de **régularité** (plus précisément d'"**arc-symétricité**").

2. Objectifs et résultats de la thèse

L'objectif de la thèse était de se placer dans la catégorie des **variétés algébriques réelles** avec **action de groupe** et, en utilisant la fonctorialité de la filtration géométrique/Nash-constructible, d'établir l'existence d'un analogue **équivariant** de la **filtration par le poids réelle** et de la **suite spectrale de poids**. La compréhension et l'extraction des informations contenues dans celle-ci ont constitué la seconde étape de ce travail.

2.1. "Complexe de poids des variétés algébriques réelles avec action", à paraître dans Mathematische Zeitschrift

Dans cet article est détaillée la première partie de ma thèse.

Sur la catégorie des **variétés algébriques réelles** équipées d'une **action** algébrique d'un **groupe fini**, la fonctorialité du **complexe** filtré **de poids** de McCrory et Parusiński permet de le munir d'une **action** induite. En utilisant une version équivariante du **critère d'extension** de foncteurs définis sur des variétés projectives lisses de F. Guillén et V. Navarro Aznar ([9]) utilisé par McCrory et Parusiński, on montre alors l'**unicité** à quasi-isomorphisme filtré équivariant près du **complexe de poids avec action**.

Après ce premier résultat, on utilise la filtration Nash-constructible (avec action) pour implémenter une régularité dans la **suite exacte courte de Smith** pour une involution. Soit X une variété algébrique réelle munie d'une involution algébrique σ, alors la suite courte

$$0 \to C_*(X^G) \oplus (1+\sigma)C_*(X) \to C_*(X) \xrightarrow{1+\sigma} (1+\sigma)C_*(X) \to 0,$$

dite de Smith, est exacte, autrement dit, on peut "**découper**" toute chaîne semi-algébrique fermée globalement invariante sous l'action de σ en (modulo sa restriction aux points fixes) deux chaînes échangées sous l'action. Cependant, la suite exacte courte de Smith n'impose aucune contrainte sur la **régularité** du découpage. La **filtration Nash-constructible** permet d'y remédier. En effet, on montre que, pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$, si c est une chaîne d'indice de filtration α globalement invariante par σ, alors on peut découper c en deux chaînes échangées sous l'action, dont l'indice dans la filtration est au maximum $\alpha + 1$: il existe toujours un découpage suffisamment régulier, effectué de telle façon que la perte de régularité (d'**arc-symmétricité**) qu'il induit puisse être contrôlée.

Pour prouver ce résultat, on se ramène (en considérant notamment compactification et résolution des singularités) au cas d'une **variété Nash** (i.e. une variété différentiable analytique qui est également semi-algébrique, cf [25]) affine compacte connexe munie d'une involution algébrique σ. On montre alors qu'il est possible de découper un tel objet en deux morceaux semi-algébriques fermés échangés sous l'action de σ, le long d'un sous-ensemble **symétrique par arcs** (un ensemble semi-algébrique est symétrique par arcs si tout arc analytique soit le rencontre en des points isolés, soit y est entièrement contenu, cf [14], [15]). Ce théorème de géométrie Nash est intéressant en lui-même. On utilise ici des techniques et des propriétés fines des **variétés Nash** et des **fonctions de Nash**.

Enfin, on donne une **interprétation** de la suite exacte courte de Smith Nash-constructible dans le cas d'une variété algébrique réelle compacte X munie d'une action libre de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dans ce cas, les **chaînes invariantes** de X filtrées par la filtration Nash-constructible correspondent, par un isomorphisme filtré, aux chaînes filtrées du **quotient** de X par G, qui est un ensemble symétrique par arcs.

On utilise l'exactitude de la suite de Smith Nash-constructible dans la seconde partie du travail de thèse, afin d'étudier des **invariants additifs**.

2.2. "Equivariant weight filtration for real algebraic varieties with action", article soumis

Soit G un groupe fini. Dans ce second article issu de la thèse, on applique **l'homologie du groupe** G au complexe de poids avec action de G pour obtenir un complexe de poids que l'on appelle équivariant. Il induit une **filtration par le poids équivariante** sur l'homologie équivariante des variétés algébriques réelles avec action de G. On montre ensuite son unicité avec des propriétés de pureté, d'additivité et d'acyclicité.

En étudiant la suite spectrale induite, on constate un surplus d'informations caractérisé par l'apparition de **différences** significatives avec la suite spectrale de poids. On se retrouve notamment confronté au fait que l'on ne puisse pas (en général) retrouver des **invariants additifs** sur la page ${}^G E^2$ de la **suite spectrale de poids équivariante**.

L'exploration en profondeur de la structure de celle-ci à la recherche de tels invariants constitue un autre volet de l'article. On réalise le complexe de poids équivariant via la **filtration Nash-constructible**. Cette réalisation nous permet d'identifier des **additivités** en termes de suites exactes longues finies sur les lignes d'une suite spectrale convergeant vers la suite spectrale de poids équivariante. Cette nouvelle suite spectrale prolonge l'additivité de la suite spectrale de poids induite par la filtration Nash-constructible et est elle-même un invariant naturel des variétés algébriques réelles munies d'une action de groupe. Ceci nous amène à définir des **invariants additifs** B_k^G.

Dans le cas $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on utilise la **suite exacte de Smith Nash-constructible** pour étudier les invariants additifs B_k^G. On comprend alors qu'y entrent en jeu à la fois la géométrie des chaînes globalement invariantes et la géométrie des chaînes de l'ensemble des points fixes. Enfin, on montre que dans certains cas, ces invariants coïncident avec les **nombres de Betti virtuels équivariants** de G. Fichou ([7]). Pour tout entier relatif q, le q-ième nombre de Betti virtuel équivariant β_q^G est l'unique invariant additif sur les variétés algébriques réelles avec action de G égal à la dimension de l'espace d'homologie équivariante d'indice q sur les variétés lisses compactes. Toujours dans le cas du groupe à deux éléments, on retrouve par ailleurs tous les nombres de Betti virtuels équivariants en utilisant le seul **critère d'extension** équivariant (cf. paragraphe 2.1 ci-dessus) appliqué aux **chaînes invariantes**.

2.3. Filtration par le poids équivariante cohomologique

Une autre partie de ma thèse de doctorat est consacrée au **pendant cohomologique** de la filtration par le poids équivariante. On se base ici sur les résultats fonctoriels obtenus avec T. Limoges sur la **filtration par le poids cohomologique** des variétés algébriques réelles (cf. paragraphe 3 ci-dessus et [16]) auxquels on applique de la **cohomologie de groupe**.

2.4. Produits

Enfin, on étudie la compatibilité de la **filtration par le poids équivariante** vis-à-vis du **produit** cartésien de variétés algébriques réelles munies d'actions de groupes. Pour cela, on utilise les relations entre produit d'homologies de groupes et homologie du groupe produit et on les applique aux résultats obtenus avec T. Limoges dans [16] sur les **produits** de **filtrations par le poids réelles**. On obtient ainsi les résultats analogues sur les produits de filtrations par le poids équivariantes.

Travaux récents

3. "Cohomology and products of real weight filtrations", avec Thierry Limoges, article soumis

Pour X une variété algébrique réelle, le complexe de **cochaînes** obtenu en **dualisant** les chaînes semi-algébriques $C_*(X)$ calcule la cohomologie à supports compacts de l'ensemble des points réels de X, à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$. Dans la première partie de cet article rédigé en collaboration avec Thierry Limoges, on dualise la **filtration géométrique/Nash-constructible** et on montre que le complexe de cochaînes filtré fonctoriel $\mathcal{N}C^*$ induit la **filtration par le poids cohomologique réelle** de Totaro ([26]) et la suite spectrale associée, et qu'il est unique à quasi-isomorphisme filtré près avec des propriétés de pureté, d'additivité et d'acyclicité. De manière similaire à [19], on réalise les **nombres de Betti virtuels** comme caractéristiques d'Euler des lignes de la page E_2 de la **suite spectrale de poids cohomologique**.

La seconde partie de l'article s'intéresse à la **compatibilité** des filtrations par le poids réelles vis-à-vis des **produits cartésiens**. Si X et Y sont deux variétés algébriques réelles, on définit tout d'abord le **produit** d'une chaîne semi-algébrique de X et d'une chaîne semi-algébrique de Y, à valeurs dans $C_*(X \times Y)$. On s'intéresse ensuite à la compatibilité de la **filtration géométrique/Nash-constructible** $\mathcal{N}$ avec ce produit et on montre (en utilisant le critère d'extension de foncteurs définis sur des variétés projectives lisses de Guillén et Navarro Aznar, cf. [9]) que le morphisme induit u entre le produit des filtrations $\mathcal{N}C_*(X)$ et $\mathcal{N}C_*(Y)$ et la filtration $\mathcal{N}C_*(X \times Y)$ du produit est un **quasi-isomorphisme filtré**. Au niveau des suites spectrales de poids associées, cela nous permet de prouver en particulier la **multiplicativité** du **polynôme de Poincaré virtuel** $\sum_{q \geq 0} \beta_q(\cdot)u^q$ ([18]) sans utiliser le théorème de factorisation faible, ainsi que le caractère **filtré** de l'**isomorphisme de Künneth** par rapport à la filtration par le poids.

On obtient les analogues cohomologiques de ces résultats en dualisant le quasi-isomorphisme filtré u. On utilise enfin celui-ci pour définir des **produits cup et cap** au niveau des **chaînes** et **cochaînes**, qui induisent les produits cup et cap en cohomologie et homologie. En particulier, ceux-ci sont **filtrés** par rapport aux filtrations par le poids cohomologique et homologique. On exhibe également des **obstructions** au fait qu'une variété algébrique réelle compacte **singulière** vérifie la **dualité de Poincaré**.

4. "Equivariant zeta functions for invariant Nash germs", article soumis

4.1. Contexte

Une question cruciale concernant l'étude des **germes analytiques réels** est celle du choix d'une **bonne relation d'équivalence** pour les distinguer. Contrairement au cas complexe, l'équivalence topologique n'est pas assez fine et l'équivalence C^1 donne déjà lieu à trop de classes d'équivalence. En 1985, T.-C. Kuo a proposé dans [13] une relation d'équivalence pour les germes analytiques réels appelée **équivalence analytique après éclatements**, pour laquelle toute famille analytique de singularités isolées possède une **classification localement finie**. Deux germes analytiques réels sont dits analytiquement équivalents après éclatements s'ils deviennent analytiquement équivalents après composition avec une composition finie d'éclatements le long de centres lisses. De plus, des **invariants** ont été identifiés pour cette relation d'équivalence. Citons notamment les invariants de T. Fukui

([8]) ainsi que les fonctions zêta de S. Koike et A. Parusiński ([11]), inspirées des **fonctions zêta motiviques** de J. Denef et F. Loeser ([5]), utilisant la caractéristique d'Euler à supports compacts sur $\mathbb{Z}_2$ comme mesure motivique.

Même si l'on se restreint à l'étude des germes analytiques réels possédant un graphe semi-algébrique, appelés **germes Nash**, la difficulté du choix d'une bonne relation d'équivalence demeure. Dans [6], G. Fichou a défini un analogue de l'équivalence analytique après éclatements pour les germes Nash, appelée **équivalence Nash après éclatements** : deux germes Nash sont dits Nash-équivalents après éclatements s'ils deviennent Nash-équivalents après composition avec une composition finie d'éclatements le long de centres lisses. Cette relation d'équivalence ne possède **pas de module** pour les familles Nash à singularités isolées. Dans ce contexte, Fichou associe à tout germe Nash f ses **fonctions zêta** $Z_f,\ Z_f^{\pm} \in \mathbb{Z}[u, u^{-1}][[T]]$, en utilisant le **polynôme de Poincaré virtuel** comme mesure motivique des **espace d'arcs** de f. Fichou montre que ces fonctions zêta sont rationnelles et qu'elles constituent des **invariants** pour l'équivalence Nash après éclatements, en faisant intervenir notamment l'invariance par isomorphisme Nash du polynôme de Poincaré virtuel.

4.2. Equivalence Nash après éclatements équivariante et fonctions zêta équivariantes pour les germes Nash invariants

Dans l'article "Equivariant zeta functions for invariant Nash germs" ([24]), on s'intéresse aux **germes Nash invariants** par composition à droite avec l'**action linéaire** d'un **groupe fini**. On définit une équivalence de Nash après éclatements adaptée aux propriétés équivariantes de tels germes : si un groupe fini G agit linéairement sur une espace affine $\mathbb{R}^d$, on dit que deux germes Nash $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ invariants sous l'action de G sur $\mathbb{R}^d$ sont **G-Nash-équivalents après éclatements** si, après composition avec une composition finie d'éclatements équivariants le long de centres lisses, ils deviennent Nash-équivalents via un isomorphisme Nash équivariant. L'équivalence Nash après éclatements équivariante généralise l'équivalence de Nash après éclatements de [6] et permet un **raffinement** des classes d'équivalence des germes Nash invariants.

Si $f : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ est un germe Nash G-invariant, le groupe G agit naturellement sur les espaces d'arcs associés à f et on peut alors considérer leurs **séries de Poincaré virtuelles équivariantes** $\sum_{q\in\mathbb{Z}} \beta_q^G(\cdot)u^q \in \mathbb{Z}[u][[u^{-1}]]$ pour définir les **fonctions zêta équivariantes** $Z_f^G,\ Z_f^{\pm} \in \mathbb{Z}[u][[u^{-1}]][[T]]$ de f. On montre une **formule** de type **Denef-Loeser** pour ces fonctions zêta équivariantes. On est pour cela amené à prouver notamment que le changement de variables de **Kontsevich** ([12]) est valide dans ce contexte, lorsque la série de Poincaré virtuelle équivariante est choisie comme mesure motivique. L'invariance par isomorphisme Nash équivariant de la série de Poincaré virtuelle équivariante permet ensuite de montrer que les fonctions zêta équivariantes sont des **invariants** pour l'équivalence Nash après éclatements équivariante des germes Nash invariants.

Projet de recherche

Travaux en cours

1. Géométrie des variétés algébriques réelles avec action de groupe et filtration par le poids équivariante

Les travaux effectués notamment dans le cadre de ma thèse s'insèrent dans la visée d'une meilleure compréhension des **variétés algébriques réelles** avec **action** de groupe, en particulier de celles qui possèdent des **singularités**, et notamment l'obtention et la compréhension d'**invariants additifs** définis sur cette catégorie encore mal comprise. Une partie de mes travaux en cours et à venir s'incrivent dans cette continuité.

1.1. Géométrie équivariante et invariants additifs

La **filtration Nash-constructible avec action**, la **suite spectrale de poids équivariante** et la **filtration par le poids équivariante** constituent des **invariants** importants de la **géométrie équivariante** des variétés algébriques réelles avec action d'un groupe fini. Il conviendra de démêler et d'identifier les quantités d'informations qu'ils semblent recéler. En particulier, la compréhension des **additivités** obtenues dans [23], et notamment des **invariants additifs** B_k^G, sera cruciale et cela nécessitera le développement de **techniques** de géométrie (algébrique, arc-symétrique et Nash) équivariante très **fines**.

Dans ce contexte, l'un des buts sera d'établir si oui ou non, les invariants B_k^G coïncident avec les **nombres de Betti virtuels équivariants**. Une première étape sera de déterminer si, dans le cas du groupe à deux éléments, la filtration Nash-constructible réalise l'extension des chaînes invariantes fournie par le critère d'extension équivariant (cf. paragraphe 2.2). Si la filtration Nash-constructible avec action calcule les nombres de Betti virtuels équivariants, on aura une **meilleure compréhension** de ceux-ci. Sinon, cela signifie qu'elle induit des **additivités inédites** et donc de nouveaux outils d'étude des variétés algébriques réelles avec action d'un groupe fini, en particulier de nouveaux invariants additifs.

1.2. Extension au cas G d'ordre quelconque

Dans ma thèse, certains résultats concernant notamment la **suite exacte courte de Smith Nash-constructible** ainsi que les **invariants additifs** B_k^G ont été montré dans le cas du groupe à deux éléments, pour lequel on est déjà confronté au surplus d'informations induit dans la suite spectrale de poids équivariante. Il est naturel de vouloir **généraliser** ces propriétés au cas d'un groupe fini d'**ordre quelconque**.

Dans le cas d'une action libre sur une variété algébrique réelle compacte, il est possible de généraliser l'isomorphisme filtré entre les chaînes invariantes et les chaînes du quotient arc-symétrique (filtrées par rapport à la filtration Nash-constructible) aux **2-groupes**, ainsi qu'aux **groupes abéliens finis**. On parvient également à obtenir cet isomorphisme filtré dans le cas d'une action quelconque d'un groupe fini d'**ordre impair** sur une variété algébrique réelle quelconque, ce qui nous permet en particulier de montrer que les invariants B_k^G et β_k^G coïncicent si G est fini d'ordre impair.

Il est également possible d'obtenir un découpage de Smith Nash-constructible pour le **groupe cyclique à quatre éléments**. Dans ce cas, une chaîne invariante peut être découpée (modulo sa restriction aux invariants sous l'action de l'élément d'ordre 2) en quatre morceaux permutés par l'action dont l'indice de régularité est augmenté au maximum de 2. Dans le cas d'un **groupe cyclique** (d'ordre pair), il devrait être possible d'**adapter** les techniques utilisées dans les cas $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

L'établissement de propriétés analogues pour des groupes d'ordre pair plus **généraux** nécessitera certainement le développement de **techniques nouvelles**. Il est à noter que, comme montré dans ma thèse et confirmé plus haut, le cas des groupes finis d'**ordre impair** constitue véritablement le

cas simple de l'étude de la **filtration par le poids équivariante**.

1.3. Exemples, variétés toriques

Un moyen efficace pour une meilleure **compréhension géométrique** de la filtration par le poids équivariante sera la construction et l'étude d'**exemples**. Par ce biais, il devrait être possible de mettre au jour de nouvelles pistes pour poursuivre l'étude de la **suite spectrale de poids équivariante**. Cela pourrait mener à la preuve d'importants **résultats** techniques intéressants en eux-mêmes, à l'image du découpage d'une variété Nash munie d'une involution le long d'un sous-ensemble symétrique par arcs, montré dans mon travail de thèse.

L'un de mes projets est notamment d'étudier l'exemple des **variétés toriques**. Celles-ci sont naturellement munies d'une **action** du groupe à deux éléments porté à une certaine puissance. Dans [19], McCrory et Parusiński ont montré que la **filtration torique** construite par F. Bihan, M. Franz, C. McCrory et J. van Hamel dans [2] réalisait, sur les variétés toriques, la **filtration par le poids**. Ils ont ainsi mis en évidence un aspect **combinatoire** de cet invariant. En adaptant cette démarche au cadre avec action, il est certainement possible de faire apparaitre de même l'aspect combinatoire de la **filtration par le poids équivariante**. En plus d'améliorer la compréhension de celle-ci, cela pourrait aussi nous fournir des **propriétés nouvelles** sur les **variétés toriques**.

1.4. Produits cartésiens, cup et cap, multiplicativité des invariants

Pendant mon doctorat, j'ai obtenu plusieurs résultats sur la **compatibilité** de la **filtration par le poids équivariante** vis-à-vis des **produits cartésiens** de variétés algébriques réelles munies d'actions de groupes finis (cf. paragraphe 2.4). Un objectif sera de compléter cette étude en étudiant notamment la question des **produits cup** et **cap équivariants**.

Les **invariants** B_k^G induits par la filtration Nash-constructible avec action sont également **multiplicatifs** par rapport au produit cartésien : on montre que, si X et Y sont respectivement munies d'une action de G et d'une action de G', alors $B_k^{G\times G'}(X\times Y)=\sum_{i+j=k} B_i^G(X)B_j^{G'}(Y)$. Cela représente un **avantage** des invariants B_k^G par rapport aux **nombres de Betti virtuels équivariants** pour lesquels la relation au produit quelconque de variétés algébriques réelles avec action constitue une question encore ouverte. Si ces invariants coïncident, cela fournira des réponses importantes à cette question.

2. Classification des singularités de germes Nash de bord

On appelle **germe Nash de bord** un germe Nash sur une paire $(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^{d-1})$ en 0, où $\mathbb{R}^{d-1}$ est donné par $x_1=0$. On s'intéresse à la restriction de tels germes au demi-plan $x_1\geq 0$. En dépliant celui-ci le long de sa frontière $x_1=0$, on obtient un nouvel espace affine $\widehat{\mathbb{R}}^d$, muni naturellement d'une **involution** qui envoie la première coordonnée sur son opposé. Les germes Nash de bord induisent des **germes Nash** sur $\widehat{\mathbb{R}}^d$ en 0, **invariants** sous cette involution linéaire et dont on peut donc considérer les classes d'équivalence sous l'**équivalence Nash après éclatements équivariante**. On se propose ainsi d'étudier les germes Nash de bord du point de vue de l'équivalence Nash après éclatements équivariante.

V.I. Arnold (cf. par exemple [1]) a classifié les **singularités simples** et **unimodales** de germes de bord, à isomorphisme analytique préservant globalement le bord près. On se propose de **classifier** celles-ci du point de vue de l'équivalence Nash après éclatements équivariante, en utilisant notamment les **fonctions zêta équivariantes**, et de **comparer** alors les classes d'équivalence obtenues.

3. Orbifolds réels

Un **orbifold réel** est le quotient d'un ensemble algébrique réel par une action de groupe. Contrairement au cas complexe, le **quotient** d'un ensemble algébrique réel par une action de groupe n'est en général plus un ensemble algébrique réel. Il reste cependant **semi-algébrique** et, si la variété est compacte et l'action libre, il est même symétrique par arcs. Comme démontré dans [22], on peut alors relier isomorphiquement la filtration Nash-constructible sur les **chaînes du quotient** à la filtration sur les **chaînes invariantes**. A partir de cette constatation, il paraît naturel de se demander ce qu'il en est du cas général. Peut-on toujours relier la **filtration par le poids équivariante** d'une variété algébrique réelle quelconque munie d'une action d'un groupe fini à la **géométrie** de son quotient, qui est un **orbifold réel** ? Par exemple, est-il possible de définir une **filtration par le poids** sur la **cohomologie orbifold** du quotient et de la relier à la filtration par le poids équivariante de la variété de départ ? La considération du cas $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est la première étape de cette étude.

La question du quotient de variétés algébriques réelles, difficile à aborder à cause de la perte de structure, semble centrale. On peut espérer que les résultats obtenus sur la filtration par le poids équivariante permettront de mieux comprendre les orbifolds réels.

Travaux à venir

4. Application aux surfaces d'Enriques réelles

Les **surfaces d'Enriques** constituent un **exemple** classique d'**orbifolds**. Une surface d'Enriques est le **quotient** d'une surface K3 (en particulier **compacte**) par une **involution libre**. Les conditions paraissent ainsi réunies pour pouvoir appliquer à une **surface d'Enriques réelle** l'isomorphisme filtré entre ses chaînes semi-algébriques et les chaînes invariantes de la surface K3 réelle qui en constitue le revêtement. La **filtration Nash-constructible** pourrait ainsi nous fournir de **nouvelles propriétés** sur ces objets au centre d'une recherche très dynamique.

5. Filtrations par le poids réelle, équivariante, complexe

Considérons une **variété algébrique réelle**. Sa **complexification** est munie naturellement d'une involution anti-holomorphe induite par la conjugaison complexe. En séparant parties réelle et imaginaire, on obtient une **nouvelle variété réelle** de dimension réelle double, **$\mathbb{Q}$-orientable**, munie de l'**involution** algébrique correspondant à la conjugaison. Peut-on définir une **filtration par le poids équivariante à coefficients rationnels** sur un tel objet et la relier à la **filtration par le poids complexe** de la variété algébrique complexe dont il est induit ? Peut-on enfin trouver un lien avec la filtration par le poids à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ de la variété réelle de départ ?

6. Fibre de Milnor réelle

La **fibre de Milnor** est un outil pour étudier les **singularités** d'hypersurfaces. Sa topologie nous renseigne sur la topologie de la singularité. Dans le cadre complexe, l'action donnée par la **monodromie** nous aide à étudier la topologie de la fibre de Milnor. Elle est cependant absente dans le cas réel. Il devrait néanmoins être possible d'utiliser la **filtration par le poids équivariante** dans la quête d'un **analogue réel** de la monodromie complexe pour étudier la fibre de Milnor réelle.

Références

[1] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, Volumes 1 and 2, Birkhäuser, Boston, 1985.

[2] F. Bihan, M. Franz, C. McCrory, J. van Hamel, *Is every toric variety an M-variety ?*, Manuscripta Math. **120** (2006), 217-232.

[3] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Real Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[4] P. Deligne, *Poids dans la cohomologie des variétés algébriques*, Proc. Int. Cong. Math. Vancouver (1974), 79-85.

[5] J. Denef, F. Loeser, *Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. math. **135** (1999), 201-232.

[6] G. Fichou, *Zeta functions and Blow-Nash equivalence*, Annales Polonici Math. **87** (2005) 111-125.

[7] G. Fichou, *Equivariant virtual Betti numbers*, Ann. de l'Inst. Fourier, **58**, no. 1 (2008), 1-27.

[8] T. Fukui, *Seeking invariants for blow-analytic equivalence*, Compositio Math. **105** (1997), 95-107.

[9] F. Guillén, V. Navarro Aznar, *Un critère d'extension des foncteurs définis sur les schémas lisses*, IHES Publ. Math. **95** (2002), 1-83.

[10] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. Math. **79** (1964), no. 2, 109-326.

[11] S. Koike, A. Parusiński, *Motivic-type invariants of blow-analytic equivalence*, Ann. Inst. Fourier **53** (2003), 2061-2104.

[12] M. Kontsevich, Lecture ar Orsay (December 7, 1995).

[13] T.-C. Kuo, *On classification of real singularities*, Invent. Math. **82** (1985), 257-262.

[14] K. Kurdyka, *Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs*, Math. Ann. **281** (1988), 445-462.

[15] K. Kurdyka, A. Parusiński, *Arc-symmetric sets and arc-analytic mappings*, Panoramas et Synthèses **24**, Soc. Math. France (2007), 33-67.

[16] T. Limoges, F. Priziac, *Cohomology and products of real weight filtrations*, prépublication, arXiv : 1403.0706, soumis, 2014.

[17] C. McCrory, A. Parusiński, *Algebraically constructible functions*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **30** (1997), 527-552.

[18] C. McCrory, A. Parusiński, *Virtual Betti numbers of real algebraic varieties*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **336** (2003), no. 9, 763-768.

[19] C. McCrory, A. Parusiński, *The weight filtration for real algebraic varieties*, Topology of stratified spaces, 121-160, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **58**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011.

[20] H. Pennaneac'h, *Nash constructible chains*, preprint Università di Pisa, (2003).

[21] F. Priziac, *Filtration par le poids équivariante pour les variétés algébriques réelles avec action*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, 2012

[22] F. Priziac, *Complexe de poids des variétés algébriques réelles avec action*, Mathematische Zeitschrift, 2013, doi :10.1007/s00209-013-1244-8

[23] F. Priziac, *Equivariant weight filtration for real algebraic varieties with action*, prépublication, arXiv : 1303.3031, soumis, 2013.

[24] F. Priziac, *Equivariant zeta functions for invariant Nash germs*, prépublication, arXiv : 1403.1020, soumis, 2014.

[25] M. Shiota, *Nash manifolds*, Lectures Notes in Math., **1269**, Springer-Verlag, 1987.

[26] B. Totaro, *Topology of singular algebraic varieties*, Proc. Int. Cong. Math. Beijing (2002), 533-541.